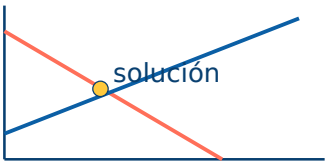
Apuntes - Sistemas de ecuaciones

Curso: 2 Eso

Un sistema de ecuaciones reúne varias condiciones sobre las mismas incógnitas. Aquí resuelves sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Actividad de introducción: dos pedidos en la cafetería

En la cafetería del instituto, Marina compra 2 bocadillos y 1 refresco y paga 5 €. Su amigo Hugo compra 1 bocadillo y 2 refrescos y paga 4 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa? Con una sola ecuación no se puede saber, pero con las dos a la vez sí: $2b + r = 5$ y $b + 2r = 4$. Cuando hay dos incógnitas y dos ecuaciones, se habla de un sistema de ecuaciones. Resolverlo es encontrar los valores que cumplen las dos ecuaciones a la vez; aquí, el bocadillo cuesta 2 € y el refresco 1 €. En este tema aprenderás tres métodos para resolver sistemas y a usarlos para resolver problemas de la vida diaria.



Qué es un sistema de ecuaciones lineales

Definición: sistema lineal

Un **sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas** es $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$. Una **solución** es un par (x, y) que cumple las dos ecuaciones a la vez.

Interpretación gráfica

Propiedad

Cada ecuación es una recta. Si se **cortan** en un punto, el sistema es **compatible determinado** (una solución). Si son **paralelas**, es **incompatible** (sin solución). Si son la **misma recta**, es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Método de sustitución

Método: sustitución

1. Despeja una incógnita en una ecuación.
2. Sustituye en la otra.

3. Resuelve la ecuación de una incógnita.
4. Calcula la otra y comprueba.

Ejemplo 1

Resuelve $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$.

$3x + 2x - 1 = 14$, $5x = 15$, $x = 3$, $y = 5$.

Método de igualación

Método: igualación

1. Despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.
2. Iguala las dos expresiones.
3. Resuelve y calcula la otra incógnita.

Ejemplo 2

Resuelve $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ **por igualación.**

$x = 7 - y$ y $x = 1 + y$. $7 - y = 1 + y$, $y = 3$, $x = 4$.

Método de reducción

Método: reducción

1. Multiplica las ecuaciones para que una incógnita tenga coeficientes opuestos.
2. Suma las ecuaciones.
3. Resuelve la ecuación que queda y sustituye.

Ejemplo 3

Resuelve $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases}$.

Sumando: $7x = 21$, $x = 3$. Entonces $6 + 3y = 12$, $y = 2$.

Ejemplo 4

Resuelve $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 2x - 5y = -4 \end{cases}$.

Multiplicamos la 1.ª por 5 y la 2.ª por 2: $15x + 10y = 65$ y $4x - 10y = -8$. Sumando: $19x = 57$, $x = 3$, $y = 2$.

Sistemas con paréntesis y fracciones

Observación

Primero se quitan paréntesis y denominadores y se escribe cada ecuación como $ax + by = c$. Después se aplica cualquier método.

Problemas con sistemas

Método: plantear un problema con un sistema

1. Elige dos incógnitas y escribe su significado.
2. Escribe dos ecuaciones con los datos.
3. Resuelve el sistema.
4. Responde con una frase y comprueba.

Ejemplo 5

En una granja hay gallinas y conejos: 30 cabezas y 86 patas. ¿Cuántos hay de cada uno?

$g + c = 30$ y $2g + 4c = 86$. De la primera, $g = 30 - c$: $60 - 2c + 4c = 86$, $c = 13$, $g = 17$.

Ejemplo 6

Dos entradas de adulto y tres infantiles cuestan 31 €; tres de adulto y una infantil, 29 €. ¿Precio de cada una?

$2a + 3i = 31$ y $3a + i = 29$. Multiplicando la 2.ª por 3: $9a + 3i = 87$. Restando: $7a = 56$, $a = 8$, $i = 5$.

Cómo elegir el método

Observación

Si una incógnita ya está despejada o tiene coeficiente 1, usa sustitución. Si los coeficientes de una incógnita son iguales u opuestos, usa reducción.

¡Atención!

Al restar ecuaciones, cambia los signos de toda la ecuación. Y comprueba el resultado en las dos ecuaciones, no en una.

Sistemas y soluciones

Definición: sistema lineal de dos ecuaciones

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones de la forma $ax + by = c$ que se deben cumplir a la vez. Una **solución** es un par (x, y) que cumple las dos. Según el número de soluciones, el sistema es **compatible determinado** (una solución), **compatible indeterminado** (infinitas) o **incompatible** (ninguna).

Ejemplo 7

Comprueba si $(3, 2)$ es solución de $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$.

Primera: $3 + 2 \cdot 2 = 7$, se cumple. Segunda: $2 \cdot 3 - 2 = 4$, se cumple. Por tanto, $(3, 2)$ es solución.

Los tres métodos de resolución

Método: sustitución

1. Despeja una incógnita en una de las ecuaciones (la que sea más fácil).
2. Sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación.
3. Resuelve la ecuación de una incógnita.
4. Calcula la otra incógnita con el valor obtenido.
5. Comprueba en las dos ecuaciones.

Método: igualación

1. Despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.
2. Iguala las dos expresiones y resuelve la ecuación resultante.
3. Sustituye el valor obtenido en cualquiera de las expresiones despejadas.
4. Comprueba la solución.

Método: reducción

1. Multiplica una o las dos ecuaciones por números adecuados para que una incógnita tenga coeficientes opuestos.
2. Suma (o resta) las ecuaciones para eliminar esa incógnita.
3. Resuelve la ecuación que queda.
4. Sustituye el valor para hallar la otra incógnita.
5. Comprueba en las dos ecuaciones.

Ejemplo 8

Resuelve $\begin{cases} 4x+3y=18 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ **por reducción.**

Multiplicamos la segunda por 3: $6x-3y=12$. Sumamos con la primera: $10x=30$, $x=3$. Sustituimos: $2\cdot 3-y=4$, $y=2$. Comprobación: $4\cdot 3+3\cdot 2=18$.

¡Atención!

- Multiplicar una ecuación solo por un lado: hay que multiplicar todos los términos, incluido el segundo miembro.
- Olvidar cambiar de signo al restar ecuaciones: es más seguro multiplicar por un número negativo y sumar.
- Calcular solo una incógnita y olvidar la otra.
- No comprobar en las dos ecuaciones: una solución que cumple solo una no es solución del sistema.

Interpretación gráfica

Propiedad: número de soluciones

Cada ecuación del sistema es una recta. Si las rectas se cortan en un punto, el sistema es compatible determinado y la solución son las coordenadas del punto de corte. Si las rectas coinciden, hay infinitas soluciones. Si son paralelas, no hay ninguna. Los coeficientes lo indican: para $a_1x+b_1y=c_1$ y $a_2x+b_2y=c_2$, si $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ es determinado; si $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ es indeterminado; y si $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ es incompatible. Esta comparación evita resolver el sistema cuando solo se pide clasificarlo.

Ejemplo 9

Clasifica $\{2x+3y=6\backslash 4x+6y=12$ **y** $\{2x+3y=6\backslash 4x+6y=10$ **sin resolverlas.**

En el primero, $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$: las tres razones coinciden, es compatible indeterminado (la segunda ecuación es el doble de la primera). En el segundo, $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ pero $\frac{6}{10}=0{,}6$: las dos primeras razones coinciden y la tercera no, luego es incompatible: las rectas son paralelas y distintas.

Problemas con sistemas

Método: plantear problemas

1. Identifica las dos cantidades desconocidas y llámalas x e y.
2. Escribe dos relaciones entre ellas, una por cada frase del enunciado.
3. Resuelve el sistema con el método más cómodo.
4. Interpreta la solución y comprueba que cumple el enunciado.
5. Escribe la respuesta con las unidades.

Ejemplo 10

En un parking hay coches y motos: 30 vehículos y 100 ruedas. ¿Cuántos hay de cada tipo?

Sea c el número de coches y m el de motos: $c + m = 30$ y $4c + 2m = 100$. De la primera, $m = 30 - c$. Entonces $4c + 60 - 2c = 100$, $2c = 40$, $c = 20$ y $m = 10$. Comprobación: $20 + 10 = 30$ y $80 + 20 = 100$.

¿Sabías que?

Los sistemas de ecuaciones se conocen desde la antigüedad: los matemáticos chinos del libro «Nueve capítulos sobre el arte matemático», escrito hace más de 2 000 años, resolvían sistemas con varias incógnitas colocando los coeficientes en tablas, un método que anticipa lo que hoy llamamos matrices. En la actualidad, un ordenador resuelve sistemas con millones de ecuaciones para predecir el tiempo o diseñar puentes.

Sistemas con paréntesis y fracciones

Regla: preparar el sistema

Antes de elegir un método hay que dejar cada ecuación en la forma $ax + by = c$. Para ello se quitan los paréntesis con la propiedad distributiva, se multiplica por el mcm de los denominadores para eliminar las fracciones, se pasan las incógnitas al primer miembro y los números al segundo, y se reducen los términos semejantes. Después se aplica el método más cómodo.

Ejemplo 11

Resuelve $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 4 \\ x - 2(y - 1) = -2 \end{cases}$.

Primera por 6: $2x + 3y = 24$. Segunda: $x - 2y + 2 = -2$, es decir, $x - 2y = -4$. Multiplicamos la segunda por 2: $2x - 4y = -8$. Restamos esta a la primera: $7y = 32$, luego $y = \dfrac{32}{7}$. Entonces $x = 2y - 4 = \dfrac{36}{7}$. La solución no es entera, pero es válida.

Comprobación: $\frac{36}{21} + \frac{16}{7} = \frac{12}{7} + \frac{16}{7} = 4$.

Cómo elegir el método

Usa sustitución cuando una incógnita tenga coeficiente 1 o -1; igualación cuando ya vengan despejadas las dos ecuaciones; y reducción cuando los coeficientes se puedan igualar fácilmente multiplicando. En cualquier caso, un sistema bien resuelto se reconoce porque la solución cumple las dos ecuaciones originales.

Método: comprobar la solución de un sistema

1. Sustituye los valores de x e y en las dos ecuaciones originales, no en las transformadas.
2. Si se cumplen las dos igualdades, la solución es correcta.
3. Si solo se cumple una, el error está en el paso en que se calculó la segunda incógnita.
4. En un problema, comprueba además que la solución tiene sentido: número natural de personas, precios positivos…

Observación: sistemas en la vida real

Los sistemas de ecuaciones se usan para ajustar mezclas en la industria, calcular dietas equilibradas o repartir recursos en una empresa. En muchos casos tienen decenas o cientos de incógnitas, y se resuelven con ordenador aplicando el mismo método de reducción que aprendes aquí, llamado método de Gauss.

Ejemplo 12

En un aparcamiento hay 30 vehículos entre coches y motos, y se cuentan 96 ruedas. ¿Cuántos hay de cada tipo?

Llamamos c a los coches y m a las motos: $c + m = 30$ y $4c + 2m = 96$. Multiplicamos la primera por 2 y restamos: $2c = 36$, $c = 18$ y $m = 12$. Comprobación: $18 + 12 = 30$ y $72 + 24 = 96$ ruedas.

El consejo de Otto

Antes de empezar, ordena el sistema para que las x y las y queden alineadas en columnas. Verás enseguida qué método conviene.