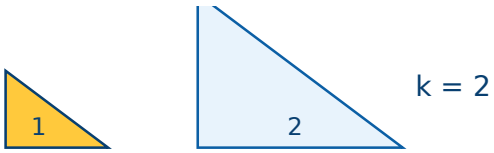
Apuntes - Semejanza y teorema de Tales

Curso: 2 Eso

Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma. La semejanza y el teorema de Tales permiten calcular alturas y distancias inaccesibles.

Actividad de introducción: la fotocopiadora

Hugo fotocopia el mapa de su barrio ampliándolo al 150 %. Cada longitud queda multiplicada por 1,5, pero el mapa conserva su forma: los ángulos son iguales y las calles siguen en la misma posición relativa. Dos figuras así se llaman semejantes. Con ellas se explican la escala de los planos, la sombra de un árbol que permite medir su altura, el tamaño de una maqueta o la ampliación de una foto. Hay una relación sorprendente: aunque los lados se multipliquen por 1,5, el área de la copia se multiplica por 2,25. En este tema aprenderás a trabajar con la razón de semejanza y con el teorema de Tales para resolver problemas de la vida real.



Figuras semejantes

Definición: figuras semejantes

Dos figuras son **semejantes** si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. La razón entre lados correspondientes es la **razón de semejanza** k.

Ejemplo 1

Un rectángulo de 4 por 6 cm es semejante a otro cuya base mide 10 cm. ¿Cuánto mide su altura?

$k = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$. Altura: $6 \cdot 2{,}5 = 15$ cm.

Razón de perímetros, áreas y volúmenes

Propiedad

Si la razón de semejanza es k: los **perímetros** (y cualquier longitud) están en razón k, las **áreas** en razón k^2 y los **volúmenes** en razón k^3.

Ejemplo 2

Un triángulo de área 12 cm² se amplía con razón $k = 3$. ¿Qué área tiene?

$12 \cdot 3^2 = 108$ cm².

Criterios de semejanza de triángulos

Regla: criterios de semejanza

Dos triángulos son semejantes si: tienen **dos ángulos iguales** (criterio AA); o tienen **los tres lados proporcionales**; o tienen **dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual**.

Ejemplo 3

Un triángulo tiene lados 3, 4, 5 y otro 9, 12, 15. ¿Son semejantes?

$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = 3$. Sí, con $k = 3$.

El teorema de Tales

Teorema

Si varias rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, los segmentos que determinan en una son proporcionales a los correspondientes en la otra: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Ejemplo 4

Tres paralelas cortan a dos rectas. En una, los segmentos miden 4 y 6; en la otra, el primero mide 10. ¿Cuánto mide el segundo?

$\frac{4}{6} = \frac{10}{x}$, $x = \frac{6 \cdot 10}{4} = 15$.

Observación

Una paralela a un lado de un triángulo forma un triángulo pequeño semejante al grande: esta es la **posición de Tales**.

Medir alturas con sombras

Método: medir una altura con una sombra

1. Mide la sombra del objeto y la de una vara de longitud conocida a la misma hora.
2. Plantea la proporción entre alturas y sombras.
3. Despeja la altura.

Ejemplo 5

Un edificio proyecta una sombra de 24 m y, a la misma hora, una vara de 2 m proyecta una de 1,5 m. ¿Altura del edificio?

$\frac{h}{24} = \frac{2}{1{,}5}$, $h = 32$ m.

Escalas

Definición: escala

La escala $1 : n$ es la razón de semejanza entre el plano o maqueta y la realidad. En una maqueta a escala $1 : 50$, 3 cm son 150 cm.

Cómo plantear un problema de semejanza

Método: plantear un problema de semejanza

1. Dibuja las dos figuras y sus datos.
2. Identifica los lados correspondientes.
3. Escribe la proporción y resuélvela.

¡Atención!

Los lados deben ser correspondientes: el mayor con el mayor. Y no confundas la razón de áreas k^2 con la de longitudes k.

Figuras semejantes y razón de semejanza

Definición: figuras semejantes

Dos figuras son **semejantes** si tienen los ángulos correspondientes iguales y los lados correspondientes proporcionales. El cociente entre las longitudes de dos lados correspondientes es la **razón de semejanza** k. Si $k > 1$ la segunda figura es una ampliación y si k es una reducción. Los polígonos con los mismos ángulos pero lados no proporcionales (un cuadrado y un rectángulo) no son semejantes.

Ejemplo 6

Dos pentágonos son semejantes. Un lado del primero mide 4 cm y su correspondiente en el segundo mide 10 cm. Si el perímetro del primero es 22 cm, ¿cuál es el del segundo?

La razón de semejanza es $k = \frac{10}{4} = 2{,}5$. El perímetro es una longitud, luego se multiplica por k: $22 \cdot 2{,}5 = 55$ cm.

Razón de perímetros, áreas y volúmenes

Propiedad: perímetros, áreas y volúmenes

Si la razón de semejanza entre dos figuras es k, la razón entre sus perímetros (y entre cualquier longitud) es k, la razón entre sus áreas es k^2 y la razón entre sus volúmenes, en cuerpos semejantes, es k^3. Por eso, al duplicar las medidas de una pizza su área se multiplica por 4, y al duplicar las de una caja su capacidad se multiplica por 8.

Ejemplo 7

Dos cajas semejantes tienen razón $k = 1{,}5$. La pequeña tiene 40 cm² de superficie y 20 L de capacidad. Calcula las de la grande.

Superficie: $40 \cdot 1{,}5^2 = 40 \cdot 2{,}25 = 90$ cm². Capacidad: $20 \cdot 1{,}5^3 = 20 \cdot 3{,}375 = 67{,}5$ L.

Criterios de semejanza de triángulos

Regla: criterios AA, LLL y LAL

Dos triángulos son semejantes si se cumple alguno de estos criterios. **AA**: tienen dos ángulos iguales. **LLL**: sus tres lados son proporcionales. **LAL**: tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual. Basta comprobar uno solo.

¡Atención!

- Comparar lados que no se corresponden: los lados correspondientes son los opuestos a ángulos iguales.
- Multiplicar el área por k en lugar de por k^2, o el volumen por k en vez de por k^3.
- Montar mal la proporción de Tales: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ compara partes con partes, y $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ compara partes con totales; no se pueden mezclar.
- Usar sombras medidas a horas distintas.

El teorema de Tales y sus aplicaciones

Método: usar Tales para medir

1. Identifica las rectas paralelas (por ejemplo, los rayos del sol o un segmento paralelo a un lado).
2. Escribe las dos razones que se igualan, cuidando que cada una compare segmentos del mismo lado.
3. Sustituye los datos conocidos y deja una incógnita.
4. Despeja con la regla de tres: producto en cruz.
5. Comprueba que el resultado es razonable (una altura no puede ser negativa ni absurda).

Ejemplo 8

Una estaca de 1,2 m proyecta una sombra de 0,9 m. Un poste proyecta una sombra de 6 m a la misma hora. ¿Cuánto mide el poste?

Por semejanza (AA): $\frac{h}{6} = \frac{1{,}2}{0{,}9}$, luego $h = \frac{6 \cdot 1{,}2}{0{,}9} = 8$ m.

¿Sabías que?

La historia cuenta que el matemático griego Tales de Mileto midió la altura de la Gran Pirámide de Egipto esperando el momento del día en que la sombra de un bastón vertical era igual a su altura: en ese instante la sombra de la pirámide, medida desde su centro, también era igual a su altura. Hoy los topógrafos y los ingenieros siguen usando la semejanza para medir distancias inaccesibles, como la anchura de un río o la altura de una montaña.

Ejemplo 9

En el triángulo ABC, el punto D de AB y el punto E de AC cumplen $DE \parallel BC$. Si $AD = 3$ cm, $AB = 9$ cm y $BC = 12$ cm, calcula DE y la razón de áreas.

Los triángulos ADE y ABC son semejantes con razón $k = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Entonces $DE = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ cm. La razón de áreas es $k^2 = \frac{1}{9}$: el área de ADE es la novena parte de la de ABC, y el trapecio $DBCE$ ocupa los $\frac{8}{9}$ restantes.

Escalas, planos y maquetas

Una escala $1 : n$ es una razón de semejanza $k = \frac{1}{n}$. Con ella, las longitudes del plano se multiplican por n para obtener las reales, las áreas por n^2 y los volúmenes por n^3.

Por eso un mapa a escala $1:50\,000$ en el que un lago ocupa 4 cm² corresponde a un lago real de $4 \cdot 50\,000^2$ cm², es decir, 1 km². Comprueba siempre las unidades antes de comparar.

Triángulos en posición de Tales

Dos triángulos están en posición de Tales cuando comparten un ángulo y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos. Es la situación más frecuente en los problemas: un triángulo pequeño dentro de otro grande, como el que forman una persona y su sombra dentro del triángulo de una farola o de un árbol.

Propiedad: triángulos en posición de Tales

Si en el triángulo ABC se traza DE paralela a BC, con D en AB y E en AC, los triángulos ADE y ABC son semejantes y se cumple $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. Cuidado: en la última razón se comparan los lados enteros AB y AC, no los trozos DB y EC.

Ejemplo 10

Una rampa sube 1,2 m en un recorrido horizontal de 8 m. A 3 m del inicio se coloca un poste vertical hasta la rampa. ¿Cuánto mide el poste?

El poste y la altura final de la rampa son paralelos, así que los triángulos están en posición de Tales. La razón de semejanza es $\frac{3}{8}$. La altura del poste es $1{,}2 \cdot \frac{3}{8} = 0{,}45$ m, es decir, 45 cm. Comprobación: $\frac{0{,}45}{3} = \frac{1{,}2}{8} = 0{,}15$, la pendiente de la rampa es la misma en los dos triángulos.

El consejo de Otto

Dibuja los triángulos separados y con la misma orientación; así verás qué lados se corresponden. Escribe después la proporción poniendo en cada fracción las medidas de una misma figura.