Ejercicios - Semejanza y teorema de Tales

Curso: 2 Eso · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Rectángulos semejantes

Dos rectángulos tienen medidas $4\ \text{cm} \times 6\ \text{cm}$ y $10\ \text{cm} \times 15\ \text{cm}$.

a. Comprueba que son semejantes y calcula la razón de semejanza.
b. Calcula sus perímetros y la razón entre ellos.
c. Calcula sus áreas y la razón entre ellas.
d. ¿Es semejante a ellos un rectángulo de $8\ \text{cm} \times 14\ \text{cm}$? Razónalo.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Triángulos semejantes

Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Otro triángulo semejante tiene su lado menor de 9 cm.

a. Calcula la razón de semejanza.
b. Calcula los otros dos lados del triángulo mayor.
c. Calcula los perímetros de ambos.
d. Calcula sus áreas (el primero es rectángulo) y la razón entre ellas.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Criterios de semejanza

Decide si los triángulos son semejantes e indica el criterio (AA, LLL o LAL).

a. Triángulo A: ángulos de 50° y 60°. Triángulo B: ángulos de 60° y 70°.
b. Triángulo C: lados 6, 8 y 10. Triángulo D: lados 9, 12 y 15.
c. Triángulo E: lados 4 y 6 con ángulo de 40° entre ellos. Triángulo F: lados 6 y 9 con ángulo de 40° entre ellos.
d. Triángulo G: lados 3, 4, 6. Triángulo H: lados 6, 8, 11.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Razón de áreas y volúmenes

Si la razón de semejanza es k, las longitudes se multiplican por k, las áreas por k^2 y los volúmenes por k^3.

a. Una figura se amplía con $k = 3$. ¿Por cuánto se multiplican su perímetro, su área

y (si es un cuerpo) su volumen?
b. Un cubo de 2 cm de arista se amplía a uno de 6 cm. Calcula el volumen de los dos y compara.
c. Dos cuadrados tienen áreas 16 cm² y 100 cm². Calcula la razón de semejanza.
d. Dos esferas semejantes tienen volúmenes 8 cm³ y 64 cm³. ¿Cuál es la razón entre sus radios?

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – El teorema de Tales

Si tres o más rectas paralelas cortan a dos rectas, los segmentos que determinan son proporcionales: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

a. $\frac{3}{x} = \frac{6}{10}$. Calcula x.
b. Tres paralelas cortan a una transversal en segmentos de 4 cm y 6 cm; en la otra, el primer segmento mide 10 cm. ¿Cuánto mide el segundo?
c. Una transversal queda dividida en 5 cm y 7 cm; la otra mide en total 18 cm. ¿Cómo queda dividida?
d. Divide un segmento de 15 cm en tres partes iguales con el teorema de Tales: explica el método.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Triángulo con una paralela

En el triángulo ABC se traza DE paralela a BC, con D en AB y E en AC. Se sabe que $AD = 4$ cm, $DB = 6$ cm y $AE = 6$ cm.

a. Calcula EC.
b. Calcula AB y AC.
c. Si $DE = 5$ cm, calcula BC.
d. Calcula la razón de las áreas de ADE y ABC.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – La altura del árbol

Una niña de 1,50 m proyecta una sombra de 1,20 m. En el mismo momento, un árbol del parque proyecta una sombra de 6 m.

a. Explica por qué los triángulos formados son semejantes.
b. Calcula la altura del árbol.
c. ¿Qué altura tendría la sombra de un edificio de 30 m en ese momento?
d. ¿Cuánto miden los rayos del sol (distancia de la copa al extremo de la sombra) en el árbol? Usa el teorema de Pitágoras.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – El edificio y el poste

En una calle de Valencia, un poste de 2 m proyecta una sombra de 3 m. A la misma hora, un edificio proyecta una sombra de 24 m.

a. Calcula la altura del edificio.
b. ¿Cuántas plantas tiene si cada planta mide 2,8 m? Redondea hacia abajo.
c. Si la sombra del poste pasa a medir 4 m, ¿cuánto medirá la del edificio?
d. ¿Por qué no se pueden usar sombras a distintas horas?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – La maqueta del edificio

Un arquitecto de Bilbao construye una maqueta a escala $1:150$ de un edificio. La maqueta mide 40 cm de alto y su planta es un rectángulo de 20 cm por 12 cm.

a. Calcula la altura real del edificio.
b. Calcula las dimensiones reales de la planta.
c. Calcula el área de la planta en la maqueta y en la realidad.
d. ¿Por qué número se multiplica el área de la maqueta para obtener el área real?
e. Si la maqueta tiene un volumen de 9 600 cm³, ¿cuál es el volumen real en m³?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Ampliar una fotografía

Una fotografía de 9 cm por 13 cm se amplía para que su lado mayor mida 39 cm. La ampliación mantiene las proporciones.

a. Calcula la razón de semejanza.
b. Calcula la otra dimensión de la ampliación.
c. Calcula el área de la foto original y de la ampliación.
d. Si el papel fotográfico cuesta 0,004 € el centímetro cuadrado, calcula el coste de la ampliación.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – ¿Cuál es la mejor oferta de pizza?

Una pizzería de Zaragoza vende pizzas circulares: la de 20 cm de diámetro cuesta 6 €, y la de 30 cm de diámetro cuesta 12 €. Las dos tienen el mismo grosor.

a. Calcula la razón de semejanza entre las dos pizzas.
b. ¿Cuántas veces es mayor el área de la grande?
c. Calcula el precio por centímetro cuadrado de cada una (usa $\pi \approx 3{,}14$).
d. ¿Qué pizza es más rentable?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Del mapa a la realidad

Tres pueblos forman en el terreno un triángulo de lados 12 km, 16 km y 20 km. En un mapa, el lado menor mide 3 cm.

a. Calcula la escala del mapa.
b. Calcula los otros dos lados en el mapa.
c. Comprueba que el triángulo es rectángulo con el teorema de Pitágoras.
d. Calcula el área real del triángulo y el área en el mapa.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – La anchura del río

Para medir la anchura de un río sin cruzarlo, un grupo de alumnos coloca una cuerda a lo largo de la orilla y forma dos triángulos semejantes: el primero tiene un lado de 20 m (la cuerda) y un lado de 15 m; el segundo, formado a través del río, tiene el lado correspondiente de x metros y la parte que cruza el río de x más la distancia de 10 m del primer triángulo.

a. Plantea la proporción que relaciona los lados de los triángulos si $\frac{x}{20} = \frac{15}{10}$.
b. Resuelve y calcula la anchura x.
c. Si la anchura se mide en pasos de 0,75 m, ¿cuántos pasos hay?
d. ¿Qué error en la medida de la cuerda cambiaría el resultado y por qué?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Tales con tres rectas

Tres rectas paralelas r, s, t cortan a dos transversales. En la primera, los segmentos miden 4 cm y 6 cm. En la segunda, el primero mide x y el segundo 9 cm.

a. Plantea la proporción.
b. Calcula x.
c. Calcula la longitud total de cada transversal entre r y t.
d. Si hubiera una cuarta paralela que dejara 3 cm más en la primera, ¿cuántos cm más habría en la segunda?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Sombra de una farola

En una calle de Granada, una farola de 6 m ilumina a Daniel, que mide 1,5 m y está a 9 m de la base de la farola. Su sombra empieza a sus pies.

a. Dibuja un esquema e identifica los dos triángulos semejantes.

b. Llama s a la longitud de su sombra y escribe la proporción.
c. Resuelve y calcula s.
d. Si Daniel se acerca a 3 m de la farola, ¿cuánto mide su sombra ahora?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Un cuadro y su ampliación

Un cuadro rectangular de 60 cm por 40 cm se reproduce en un póster semejante cuyo lado mayor mide 90 cm. El lienzo se paga a 0,012 € el centímetro cuadrado.

a. Calcula la razón de semejanza.
b. Calcula el lado menor del póster.
c. Calcula las áreas del cuadro y del póster.
d. Calcula el coste del lienzo del póster.
e. ¿Cuánto más cuesta el póster que el cuadro? Expresa la diferencia con la razón de áreas.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – La pecera

Una tienda de animales de Málaga vende dos peceras con forma de cubo: la pequeña tiene 30 cm de arista y la grande, 60 cm.

a. Calcula la razón de semejanza.
b. Calcula la superficie de vidrio (5 caras, sin tapa) de cada una.
c. Calcula la capacidad de cada una en litros (1 L $= 1\,000$ cm³).
d. Compara las razones: superficie y capacidad. ¿Qué se cumple?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Depósitos semejantes

Una empresa fabrica dos depósitos cilíndricos de agua semejantes. El pequeño tiene una capacidad de 500 litros y 6 m² de chapa. La razón de semejanza del grande al pequeño es 2.

a. ¿Cuál es la capacidad del grande?
b. ¿Cuánta chapa necesita?
c. Si la chapa cuesta 18 € el metro cuadrado, calcula el coste de cada uno.
d. ¿Qué depósito es más económico por litro?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Una figura a escala

Un fabricante de juguetes de Alicante hace una figura a escala $1 : 20$ de una persona

real de 1,80 m de altura y 72 kg de masa, fabricada con un material de igual densidad que el cuerpo.

a. Calcula la altura de la figura en cm.
b. ¿Por qué número se divide el área de la piel?
c. ¿Por qué número se divide el volumen y la masa? Calcula la masa de la figura.
d. Si el material de la figura es el doble de denso que el cuerpo humano, ¿cuál sería su masa?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: la altura de un triángulo rectángulo

En un triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 8 cm, la hipotenusa mide 10 cm. Se traza la altura h sobre la hipotenusa, que la divide en dos segmentos m y n.

a. Demuestra que el triángulo pequeño que comparte el ángulo del cateto 6 es semejante al grande.
b. Calcula h con la proporción de lados correspondientes.
c. Calcula m y n y comprueba que $h^2 = m \cdot n$.
d. Calcula el área del triángulo de dos formas y comprueba que coinciden.