Soluciones - Semejanza y teorema de Tales

Curso: 2 Eso

Solución del ejercicio 1

a. $\frac{10}{4} = 2{,}5$ y $\frac{15}{6} = 2{,}5$. Lados proporcionales y ángulos rectos: son semejantes con $k = 2{,}5$.

b. Perímetros: $2(4+6) = 20$ cm y $2(10+15) = 50$ cm. Razón: $\frac{50}{20} = 2{,}5 = k$.

c. Áreas: 24 cm² y 150 cm². Razón: $\frac{150}{24} = 6{,}25 = k^2$.

d. $\frac{8}{4} = 2$ pero $\frac{14}{6} \approx 2{,}33$. No son proporcionales: no es semejante.

Solución del ejercicio 2

a. Dividimos los lados correspondientes: $k = \frac{9}{3} = 3$.

b. Multiplicamos los otros lados por la razón: $4 \cdot 3 = 12$ cm y $5 \cdot 3 = 15$ cm.

c. Sumamos los lados y comparamos: Pequeño: $3+4+5 = 12$ cm. Grande: $9+12+15 = 36$ cm. Razón: 3.

d. Usamos los catetos como base y altura: Pequeño: $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ cm². Grande: $\frac{9 \cdot 12}{2} = 54$ cm². Razón: $\frac{54}{6} = 9 = 3^2$.

La razón de áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

Solución del ejercicio 3

a. El tercer ángulo se obtiene restando de 180°: A tiene ángulos $50°, 60°, 70°$; B tiene $60°, 70°, 50°$. Son semejantes por el criterio AA.

b. Comprobamos si los tres lados son proporcionales: $\frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10} = 1{,}5$. Son semejantes por LLL.

c. Comprobamos dos lados proporcionales y el ángulo comprendido: $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = 1{,}5$ y el ángulo comprendido es igual. Son semejantes por LAL.

d. Comparamos las tres razones: $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{8}{4} = 2$ pero $\frac{11}{6} \approx 1{,}83$. No son semejantes.

Solución del ejercicio 4

a. Las longitudes, áreas y volúmenes se multiplican por k, k^2 y k^3: Perímetro $\times 3$; área $\times 9$; volumen $\times 27$.
b. Calculamos los volúmenes y dividimos: $V_1 = 2^3 = 8$ cm³ y $V_2 = 6^3 = 216$ cm³. Razón: $\frac{216}{8} = 27 = 3^3$.
c. La razón de áreas es k^2; hacemos la raíz cuadrada: $k^2 = \frac{100}{16} = 6{,}25$, luego $k = 2{,}5$ (lados de 4 y 10 cm).
d. La razón de volúmenes es k^3; hacemos la raíz cúbica: $k^3 = \frac{64}{8} = 8$, luego $k = 2$.

Solución del ejercicio 5

a. $3 \cdot 10 = 6x$, $x = 5$.
b. $\frac{4}{6} = \frac{10}{y}$, $y = \frac{60}{4} = 15$ cm.
c. Razón $\frac{5}{12}$ y $\frac{7}{12}$ del total: $\frac{5}{12} \cdot 18 = 7{,}5$ cm y $\frac{7}{12} \cdot 18 = 10{,}5$ cm.
d. Desde un extremo se traza una semirrecta y se marcan 3 segmentos iguales de cualquier longitud; se une el último punto con el otro extremo del segmento de 15 cm y se trazan paralelas a esa recta por los otros dos puntos. Dividen el segmento en tres partes de 5 cm.

Solución del ejercicio 6

a. Aplicamos el teorema de Tales a los segmentos de los dos lados: Por Tales: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, es decir, $\frac{4}{6} = \frac{6}{EC}$, $EC = 9$ cm.
b. Sumamos los dos trozos de cada lado: $AB = 4 + 6 = 10$ cm y $AC = 6 + 9 = 15$ cm.
c. Usamos la razón entre el triángulo pequeño y el grande: Los triángulos ADE y ABC son semejantes con razón $\frac{AD}{AB} = \frac{4}{10} = 0{,}4$. Entonces $BC = \frac{5}{0{,}4} = 12{,}5$ cm.
d. Elevamos la razón de semejanza al cuadrado: Razón de áreas: $0{,}4^2 = 0{,}16$, es decir, $\frac{4}{25}$.

Solución del ejercicio 7

a. Razonamos con los ángulos: Los rayos del sol son paralelos y los objetos son

verticales: los ángulos coinciden (AA).

b. Planteamos la proporción altura/sombra: $\frac{h}{6} = \frac{1{,}5}{1{,}2}$, $h = \frac{6 \cdot 1{,}5}{1{,}2} = 7{,}5$ m.
c. Usamos la misma proporción con el edificio: $\frac{30}{s} = \frac{1{,}5}{1{,}2}$, $s = \frac{30 \cdot 1{,}2}{1{,}5} = 24$ m.
d. La altura y la sombra son los catetos de un triángulo rectángulo: $\sqrt{7{,}5^2 + 6^2} = \sqrt{56{,}25 + 36} = \sqrt{92{,}25} \approx 9{,}6$ m.

Solución del ejercicio 8

a. Altura y sombra son proporcionales a la misma hora: $\frac{h}{24} = \frac{2}{3}$, $h = 16$ m.
b. Dividimos la altura entre lo que mide cada planta: $16 : 2{,}8 \approx 5{,}7$: unas 5 plantas completas.
c. Planteamos la nueva proporción: La razón es $\frac{16}{s} = \frac{2}{4}$, $s = 32$ m.
d. Razonamos sobre el ángulo del sol: Porque el ángulo del sol cambia durante el día y los triángulos dejarían de ser semejantes.

Solución del ejercicio 9

a. Multiplicamos por 150 y pasamos a metros: $40 \cdot 150 = 6\,000$ cm $= 60$ m.
b. Multiplicamos cada dimensión por 150: $20 \cdot 150 = 3\,000$ cm $= 30$ m y $12 \cdot 150 = 1\,800$ cm $= 18$ m.
c. Calculamos las dos áreas: Maqueta: $20 \cdot 12 = 240$ cm². Realidad: $30 \cdot 18 = 540$ m².
d. Las áreas se multiplican por el cuadrado de la escala: Por $150^2 = 22\,500$: $240 \cdot 22\,500 = 5\,400\,000$ cm² $= 540$ m².
e. Los volúmenes se multiplican por el cubo de la escala: Por $150^3 = 3\,375\,000$: $9\,600 \cdot 3\,375\,000 = 3{,}24 \cdot 10^{10}$ cm³ $= 32\,400$ m³.

Solución del ejercicio 10

a. Dividimos el lado mayor ampliado entre el original: $k = \frac{39}{13} = 3$.
b. Multiplicamos el lado menor por 3: $9 \cdot 3 = 27$ cm. La ampliación mide 27×39 cm.
c. Multiplicamos los lados de cada foto: Original: $9 \cdot 13 = 117$ cm². Ampliación: $27 \cdot 39 = 1\,053$ cm² $= 117 \cdot 9$.
d. Multiplicamos el área por el precio del cm²: $1\,053 \cdot 0{,}004 = 4{,}212 \approx 4{,}21$ €.

El área de la ampliación es $3^2 = 9$ veces la original.

Solución del ejercicio 11

a. Dividimos los diámetros: $k = \frac{30}{20} = 1{,}5$.
b. La razón de áreas es k^2: $k^2 = 2{,}25$ veces.
c. Calculamos el área de cada pizza con su radio y dividimos el precio entre el área: Pequeña: $A = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314$ cm², $\frac{6}{314} \approx 0{,}0191$ €/cm². Grande: $A = 3{,}14 \cdot 15^2 = 706{,}5$ cm², $\frac{12}{706{,}5} \approx 0{,}0170$ €/cm².
d. Comparamos el precio por cm²: La grande, porque cuesta menos por cm²: 12 € por 2,25 veces el área es más barato que $2{,}25 \cdot 6 = 13{,}5$ €.

Solución del ejercicio 12

a. Pasamos 12 km a cm y comparamos con 3 cm: 12 km $= 1\,200\,000$ cm. Escala: $3 : 1\,200\,000 = 1 : 400\,000$.
b. Dividimos cada distancia real entre 400 000: 16 km $\to 4$ cm y 20 km $\to 5$ cm.
c. Comprobamos si se cumple Pitágoras: $12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$. Es rectángulo.
d. Calculamos el área real y la del mapa: Real: $\frac{12 \cdot 16}{2} = 96$ km². Mapa: $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ cm². Comprobación: $6 \cdot 400\,000^2$ cm² $= 96$ km².

Solución del ejercicio 13

a. La proporción es $\frac{x}{20} = \frac{15}{10} = 1{,}5$.
b. $x = 20 \cdot 1{,}5 = 30$ m.
c. $30 : 0{,}75 = 40$ pasos.
d. Un error en la cuerda se multiplica por la razón 1,5: un error de 1 m en la cuerda daría 1,5 m de error en la anchura.

Solución del ejercicio 14

a. Por el teorema de Tales los segmentos son proporcionales: $\frac{4}{6} = \frac{x}{9}$.
b. Despejamos x: $x = \frac{4 \cdot 9}{6} = 6$ cm.
c. Sumamos los segmentos de cada transversal: Primera: $4 + 6 = 10$ cm. Segunda: $6 + 9 = 15$ cm. Razón: $1{,}5$.
d. Multiplicamos por la razón 1,5: $3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$ cm más.

Las paralelas cortan a las transversales en segmentos proporcionales.

Solución del ejercicio 15

a. Los triángulos son: el grande (farola, suelo hasta el extremo de la sombra) y el pequeño (Daniel, su sombra). Tienen un ángulo común y son rectángulos: semejantes por AA.
b. $\frac{s}{s+9} = \frac{1{,}5}{6}$.
c. $6s = 1{,}5s + 13{,}5$, $4{,}5s = 13{,}5$, $s = 3$ m.
d. $\frac{s}{s+3} = \frac{1}{4}$, $4s = s + 3$, $s = 1$ m.

Solución del ejercicio 16

a. Dividimos los lados mayores: $k = \frac{90}{60} = 1{,}5$.
b. Multiplicamos el lado menor por la razón: $40 \cdot 1{,}5 = 60$ cm.
c. Superficie del cuadro y del póster: Cuadro: $60 \cdot 40 = 2\,400$ cm². Póster: $90 \cdot 60 = 5\,400$ cm² $= 2\,400 \cdot 2{,}25$.
d. El lienzo del póster se paga por centímetro cuadrado: $5\,400 \cdot 0{,}012 = 64{,}80$ €.
e. Comparamos los dos costes: El cuadro cuesta $2\,400 \cdot 0{,}012 = 28{,}80$ €. El póster cuesta $2{,}25$ veces más: $64{,}80 - 28{,}80 = 36$ € de diferencia.

Solución del ejercicio 17

a. Dividimos las aristas: $k = 2$.
b. Cinco caras cuadradas en cada pecera: Pequeña: $5 \cdot 30^2 = 4\,500$ cm². Grande: $5 \cdot 60^2 = 18\,000$ cm².
c. Calculamos los volúmenes y pasamos a litros: Pequeña: $30^3 = 27\,000$ cm³ $= 27$ L. Grande: $60^3 = 216\,000$ cm³ $= 216$ L.
d. Dividimos superficies y capacidades: Superficie: $\frac{18\,000}{4\,500} = 4 = k^2$. Capacidad: $\frac{216}{27} = 8 = k^3$.

Al duplicar la arista, el vidrio se multiplica por 4 y la capacidad por 8.

Solución del ejercicio 18

a. La capacidad es un volumen: se multiplica por k^3. $500 \cdot 2^3 = 4\,000$ litros.
b. La chapa es una superficie: se multiplica por k^2. $6 \cdot 2^2 = 24$ m².
c. Multiplicamos la chapa por el precio del m²: Pequeño: $6 \cdot 18 = 108$ €. Grande:

$24 \cdot 18 = 432$ €.

d. Dividimos el coste entre los litros: Pequeño: $\frac{108}{500} = 0{,}216$ €/L. Grande: $\frac{432}{4\,000} = 0{,}108$ €/L. El grande es la mitad de caro por litro.

Solución del ejercicio 19

a. Dividimos la altura real entre 20: $180 : 20 = 9$ cm.
b. Las áreas se reducen con el cuadrado de la escala: Las áreas se dividen entre $20^2 = 400$.
c. Volúmenes y masas se reducen con el cubo de la escala: Los volúmenes (y masas) se dividen entre $20^3 = 8\,000$. Masa: $72 : 8\,000 = 0{,}009$ kg $= 9$ g.
d. Con el doble de densidad, la masa se duplica: Con doble densidad, el doble: 18 g.

Solución del ejercicio 20

a. Los dos triángulos son rectángulos y tienen en común el ángulo agudo del vértice del cateto 6: semejantes por AA.
b. $\frac{h}{8} = \frac{6}{10}$, $h = 4{,}8$ cm.
c. Con la proporción del cateto 6: $6^2 = 10 \cdot m$, $m = 3{,}6$ cm; $n = 10 - 3{,}6 = 6{,}4$ cm. $m \cdot n = 3{,}6 \cdot 6{,}4 = 23{,}04 = 4{,}8^2$.
d. Con los catetos: $\frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ cm². Con hipotenusa y altura: $\frac{10 \cdot 4{,}8}{2} = 24$ cm².