# Apuntes - Proporcionalidad y porcentajes

Curso: 2 Eso

Este tema amplía la proporcionalidad a varias magnitudes y la relaciona con porcentajes, escalas y repartos.

**Actividad de introducción: el supermercado**

Carmen va al supermercado con su padre en Alicante. Cinco kilos de naranjas cuestan 6 €, así que diez kilos costarán 12 €: el precio es proporcional a los kilos. En la sección de ropa, una camiseta de 20 € tiene un 30 % de descuento; ¿cuánto se ahorra? Y en casa, para pintar la habitación, cuantos más pintores trabajen, menos días tardarán: eso es proporcionalidad inversa. Las proporciones y los porcentajes están en las compras, en las recetas, en los mapas y en las noticias, y dominarlos te ayuda a tomar mejores decisiones. En este tema aprenderás a trabajar con ellos de forma ordenada y a evitar los errores más comunes.




5 kg → 6 €
10 kg → 12 €

30 % de 20 € = 6 €

## Magnitudes directamente proporcionales

**Definición: proporcionalidad directa**

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si su cociente $\frac{y}{x} = k$ es constante. La tabla tiene todos los cocientes iguales y la gráfica es una recta por el origen.

## Magnitudes inversamente proporcionales

**Definición: proporcionalidad inversa**

Son **inversamente proporcionales** si su producto $x \cdot y = k$ es constante. Al duplicar una, la otra se divide por 2.

**Ejemplo 1**

**12 operarios tardan 15 días en una obra. ¿Cuántos días tardarán 20 operarios?**

Inversa: $12 \cdot 15 = 20 \cdot x$, $x = 9$ días.

## Proporcionalidad compuesta

**Método: regla de tres compuesta**

1. Escribe los datos en una tabla y decide, comparando cada magnitud con la incógnita, si es directa o inversa.
2. Si es directa, multiplica por la razón; si es inversa, por la razón invertida.
3. Calcula y comprueba.

**Ejemplo 2**

**6 máquinas fabrican 900 piezas en 5 horas. ¿Cuántas piezas fabrican 9 máquinas en 4 horas?**

Más máquinas, más piezas (directa); menos horas, menos piezas (directa):
$x = 900 \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{4}{5} = 1080$ piezas.

## Porcentajes

**Definición: porcentaje**

El $p\,\%$ de una cantidad $C$ es $C \cdot \frac{p}{100}$. Para saber qué porcentaje es una parte $A$ de un total $C$: $\frac{A}{C} \cdot 100$.

## Aumentos y disminuciones porcentuales

**Regla: variaciones porcentuales**

Aumento del $p\,\%$: multiplicar por $1 + \frac{p}{100}$ (**índice de variación**). Disminución: $1 - \frac{p}{100}$. Para hallar la cantidad inicial se divide por el índice: $C_0 = \frac{C_f}{\text{Índice}}$.

**Ejemplo 3**

**Tras una rebaja del 15 % una camiseta cuesta 34 €. ¿Cuál era su precio inicial?**

Índice $0{,}85$: $C_0 = \frac{34}{0{,}85} = 40$ €.

## Porcentajes sucesivos

**Regla: porcentajes sucesivos**

Si una cantidad varía en varios porcentajes seguidos, se multiplican los índices de variación.

**Ejemplo 4**

**Un precio de 200 € sube un 10 % y luego baja un 10 %. ¿Cuánto vale al final?**

$200 \cdot 1{,}10 \cdot 0{,}90 = 198$ €. Baja un 1 % en total.

## Escalas

**Definición: escala**

Una **escala** $1 : n$ indica que 1 unidad del plano equivale a $n$ unidades de la realidad. Si un mapa tiene escala $1 : 50\,000$, 1 cm son 500 m.

**Ejemplo 5**

**En un plano a escala $1 : 200$, una sala mide 6 cm de largo. ¿Cuánto mide en realidad?**

$6 \cdot 200 = 1200$ cm $= 12$ m.

## Repartos proporcionales

**Método: repartir proporcionalmente**

1. Suma las partes (los números a los que se reparte proporcionalmente).
2. Divide la cantidad entre esa suma para hallar la parte de una unidad.
3. Multiplica por cada parte.

**Ejemplo 6**

**Tres amigos ponen 20, 30 y 50 € para un décimo que gana 1500 €. ¿Cuánto recibe cada uno?**

Suma: 100. $1500 : 100 = 15$. Reciben 300 €, 450 € y 750 €.

**¡Atención!**

Dos subidas o bajadas porcentuales seguidas no se suman. Y en proporcionalidad compuesta, si te equivocas de directa o inversa, todo sale mal.

## Cómo reconocer cada tipo de proporcionalidad

**Método: directa o inversa**

1. Pregúntate: si una magnitud se hace el doble, ¿qué le pasa a la otra?
2. Si también se hace el doble, es directa: el cociente $\frac{y}{x}$ es constante.
3. Si se hace la mitad, es inversa: el producto $x \cdot y$ es constante.
4. Si no se cumple ninguna, no es proporcional (por ejemplo, la edad y la altura).
5. Plantea la regla de tres o la constante y comprueba que el resultado es razonable.

**Ejemplo 7**

**Si 3 obreros hacen una zanja en 12 días, ¿cuánto tardan 9 obreros?**

Más obreros, menos días: inversa. Producto constante: $3 \cdot 12 = 36$. Con 9 obreros: $36 : 9 = 4$ días. Comprobación: tres veces más obreros tardan tres veces menos.

## Proporcionalidad compuesta paso a paso

**Regla: proporcionalidad compuesta**

Para resolver un problema con tres o más magnitudes, se comparan una a una con la magnitud de la incógnita, dejando fijas las demás. Cada comparación aporta un factor: si es directa, se multiplica por $\frac{\text{nuevo}}{\text{antiguo}}$ y si es inversa, por $\frac{\text{antiguo}}{\text{nuevo}}$. El resultado es el dato inicial por todos esos factores.

**Ejemplo 8**

**4 camiones transportan 120 toneladas en 3 viajes. ¿Cuántas toneladas transportan 6 camiones en 5 viajes?**

Toneladas con camiones: directa, factor $\frac{6}{4}$; con viajes: directa, factor $\frac{5}{3}$. Resultado: $120 \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{5}{3} = 300$ toneladas.

## Porcentajes como fracciones, decimales y índices de variación

**Definición: índice de variación**

El **índice de variación** es el número por el que hay que multiplicar una cantidad para obtener el resultado de aplicarle un aumento o una disminución porcentual. Para un aumento del $p\,\%$ es $1 + \frac{p}{100}$ y para una disminución del $p\,\%$ es $1 - \frac{p}{100}$. Con índices,

los aumentos y disminuciones sucesivas se resuelven multiplicando los índices: un 20 % de subida y un 10 % de bajada dan $1{,}2 \cdot 0{,}9 = 1{,}08$, es decir, un aumento total del 8 %.

**Ejemplo 9**

**Calcula el índice de variación y el precio final de un artículo de 50 € con una subida del 8 % y después una bajada del 5 %.**

Índices: $1{,}08$ y $0{,}95$. Índice total: $1{,}08 \cdot 0{,}95 = 1{,}026$. Precio final: $50 \cdot 1{,}026 = 51{,}30$ €. Es una subida total del 2,6 %, no del 3 %.

**¡Atención!**

- Sumar porcentajes sucesivos: dos rebajas del 20 % y del 10 % no equivalen a una del 30 % sino del 28 %.
- Calcular el valor inicial restando el porcentaje al valor final: hay que dividir entre el índice de variación.
- Confundir proporcionalidad directa e inversa: pregunta siempre qué le pasa a una magnitud cuando la otra se duplica.
- Usar la escala al revés: en $1 : 50\,000$ el plano es más pequeño que la realidad.

## Escalas y repartos

**Propiedad: escala**

Una escala $1 : n$ indica que cada unidad del plano representa $n$ unidades de la realidad. Para pasar del plano a la realidad se multiplica por $n$ y para pasar de la realidad al plano se divide entre $n$. Si la escala es $1 : 50\,000$, 1 cm del mapa son 500 m. Los repartos proporcionales siguen la misma idea: se divide la cantidad entre la suma de las partes y se multiplica por la parte de cada uno.

**Ejemplo 10**

**En un plano a escala $1 : 250$, un jardín mide 8 cm por 5 cm. ¿Cuáles son sus dimensiones reales y su superficie?**

Largo real: $8 \cdot 250 = 2\,000$ cm $= 20$ m. Ancho real: $5 \cdot 250 = 1\,250$ cm $= 12{,}5$ m. Superficie: $20 \cdot 12{,}5 = 250$ m². Obsérvese que la superficie del plano es $40$ cm$^2$, y la real no se obtiene multiplicando por 250, sino por $250^2$.

**¿Sabías que?**

La proporcionalidad ya era conocida por los griegos: Tales de Mileto midió la altura de la Gran Pirámide comparando su sombra con la de un bastón, usando proporciones. Mucho después, los pintores del Renacimiento usaron proporciones para representar

la perspectiva, y hoy los arquitectos y diseñadores trabajan con escalas en cada plano.

## Interés simple y variaciones encadenadas

Los porcentajes están presentes en las cuentas de ahorro, los préstamos, los impuestos y las estadísticas de población. En todos estos casos hay que distinguir si el porcentaje se aplica siempre sobre la misma cantidad inicial o, cada vez, sobre la cantidad que resulta del paso anterior.

**Regla: interés simple**

Si se deposita un capital $C$ a un rédito anual del $r\,\%$ durante $t$ años, y los intereses no se acumulan al capital, el interés obtenido es $I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{100}$. El interés es directamente proporcional al capital, al rédito y al tiempo.

**Ejemplo 11**

**Un precio sube un 10 % en enero y otro 10 % en febrero. ¿Ha subido un 20 % en total?**

Aplicamos los índices de variación seguidos: $1{,}10 \cdot 1{,}10 = 1{,}21$. El precio final es el 121 % del inicial, así que la subida total es del 21 %, no del 20 %. Con un precio de 50 €: tras enero cuesta 55 € y tras febrero $55 \cdot 1{,}10 = 60{,}50$ €, que son 10,50 € más, el 21 % de 50 €. La segunda subida se calcula sobre 55 €, no sobre 50 €.

**Observación: porcentaje y puntos porcentuales**

Si el paro pasa del 10 % al 12 %, ha subido 2 *puntos porcentuales*, pero en términos relativos ha aumentado un 20 %, porque 2 es el 20 % de 10. En las noticias conviene leer con atención cuál de las dos cosas se dice.

**Ejemplo 12**

**Calcula el interés simple que producen 3 000 € al 2,5 % durante 4 años.**

Aplicamos $I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{100} = \dfrac{3\,000 \cdot 2{,}5 \cdot 4}{100} = 300$ €. Al final se tienen $3\,300$ €. Con interés compuesto se tendrían $3\,000 \cdot 1{,}025^4 \approx 3\,311{,}44$ €, algo más, porque los intereses de cada año también producen intereses.

**El consejo de Otto**

Convierte siempre el porcentaje en índice de variación: subir un 8 % es multiplicar por 1,08. Es más rápido y sirve para varios cambios seguidos.