Apuntes - Probabilidad

Curso: 2 Eso

La probabilidad mide la incertidumbre. En 2.º de ESO calculas probabilidades con Laplace y con experimentos compuestos, usando diagramas de árbol y tablas.

Actividad de introducción: la ruleta del recreo

En la fiesta del colegio hay una ruleta con ocho sectores iguales de colores: tres rojos, dos azules, dos verdes y uno amarillo. Al hacerla girar, nadie puede asegurar en qué color se detendrá, pero sí podemos decir que es más probable que salga rojo que amarillo. La probabilidad mide ese grado de confianza con un número entre 0 y 1: la del rojo es $\frac{3}{8}$ y la del amarillo $\frac{1}{8}$. Cuando los resultados son igualmente probables basta contar. Así funcionan los juegos de azar, las previsiones del tiempo o los controles de calidad. En este tema aprenderás a calcular probabilidades y a organizar los casos con tablas y diagramas de árbol.



P(rojo) = 3/8
P(amarillo) =

Experimentos aleatorios y sucesos

Definición: experimento aleatorio y suceso

Un experimento es **aleatorio** si su resultado depende del azar. El **espacio muestral** E recoge todos los resultados posibles y un **suceso** es un subconjunto de E. Los sucesos **incompatibles** no pueden darse a la vez.

Regla de Laplace

Regla de Laplace

Si todos los resultados de E son equiprobables: $P(A) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$.

Ejemplo 1

Se saca una carta de una baraja española de 40. Calcula $P(\text{oros})$ y $P(\text{rey})$.

$P(\text{oros}) = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4}$ y $P(\text{rey}) = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10}$.

Propiedades de la probabilidad

Propiedad

$0 \leq P(A) \leq 1$. $P(\text{seguro}) = 1$ y $P(\text{imposible}) = 0$. Suceso contrario: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Si A y B son incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; en general, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ejemplo 2

En un dado, calcula $P(\text{múltiplo de 2 o de 3})$.

Favorables: 2, 3, 4, 6, es decir 4. $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Probabilidad experimental

Observación

Si no se conoce la probabilidad, se estima con la **frecuencia relativa** tras muchas repeticiones. Cuantas más veces se repite, más se acerca a la probabilidad teórica.

Experimentos compuestos y diagramas de árbol

Regla: diagrama de árbol

En un experimento de varias etapas se construye un **diagrama de árbol**. La probabilidad de un camino se obtiene **multiplicando** las probabilidades de sus ramas; la de un suceso con varios caminos, **sumando** los caminos favorables.

Ejemplo 3

Una urna tiene 3 bolas rojas y 2 azules. Se extraen dos bolas con reposición. Calcula $P(\text{dos rojas})$ y $P(\text{una de cada color})$.

$P(RR) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$. Una de cada: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$.

Ejemplo 4

Con la misma urna, se extraen dos bolas sin reposición. Calcula $P(\text{dos rojas})$.

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Recuento de casos: dos dados y combinaciones

Método: contar casos

1. Si hay dos pasos, usa una tabla de doble entrada.
2. Si hay más, usa un diagrama de árbol.
3. Cuenta los favorables y los posibles.

Ejemplo 5

Se lanzan dos dados. Calcula $P(\text{suma } 8)$ y $P(\text{suma} \leq 3)$.

Hay 36 casos. Suma 8: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) es decir 5, $\frac{5}{36}$. Suma menor o igual que 3: (1,1), (1,2), (2,1), es decir 3, $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Tablas de doble entrada

Ejemplo 6

En una clase de 30 alumnos, 18 son chicas y 12 chicos; 10 chicas y 5 chicos llevan gafas. Calcula la probabilidad de elegir al azar un alumno con gafas.

Con gafas: $10 + 5 = 15$. $P = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

¡Atención!

Sin reposición las probabilidades de la 2.ª etapa cambian. Y la suma de las probabilidades de las ramas que salen de un nodo debe ser 1.

Sucesos seguros, imposibles y contrarios

Definición: tipos de sucesos

Un **suceso seguro** ocurre siempre, su probabilidad es 1; un **suceso imposible** no ocurre nunca, su probabilidad es 0. El **suceso contrario** de A, que se escribe , ocurre cuando no ocurre A, y se cumple . Dos sucesos son **incompatibles** si no pueden ocurrir a la vez; entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ejemplo 7

En una bolsa hay 3 bolas rojas, 2 azules y 5 verdes. Calcula $P(\text{roja o azul})$ y $P(\text{no verde})$.

Total: 10 bolas. Rojas y azules son incompatibles: $P = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. «No verde» es lo mismo que «roja o azul», luego $P = \frac{1}{2}$. Comprobación: $1 - \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Técnicas de recuento

Regla: principio de multiplicación

Si un experimento se compone de varias etapas y la primera puede dar m resultados, la segunda n y la tercera p, el número total de resultados es $m \cdot n \cdot p$. Un diagrama de árbol dibuja todos los caminos; la probabilidad de un camino es el producto de las probabilidades de sus ramas, y la probabilidad de un suceso con varios caminos es la suma de las probabilidades de esos caminos.

Ejemplo 8

Un bocadillo se elige entre 3 panes, 4 rellenos y 2 bebidas. ¿Cuántos menús distintos hay?

Por el principio de multiplicación: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ menús distintos.

Método: resolver un problema con árbol

1. Identifica las etapas del experimento.
2. Dibuja un árbol con las ramas posibles y escribe su probabilidad en cada una.
3. Si no se devuelve la bolita, cambia las probabilidades de la segunda etapa.
4. Multiplica a lo largo de cada camino.
5. Suma los caminos que cumplen lo que pide el suceso.
6. Comprueba que la suma de todos los caminos es 1.

Con y sin reemplazamiento

Propiedad: experimentos independientes y dependientes

Dos sucesos son **independientes** si el resultado de uno no influye en el otro, como dos lanzamientos de un dado o una extracción con devolución de la bola. En ese caso $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$. En una extracción **sin devolución** el contenido de la urna cambia: la segunda probabilidad se calcula con los casos que quedan.

Ejemplo 9

En una caja hay 5 caramelos de fresa y 3 de limón. Se toman dos al azar sin devolver. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean de fresa?

Primera: $\frac{5}{8}$. Quedan 4 de fresa entre 7: $\frac{4}{7}$. Producto: $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$.

¡Atención!

- Aplicar la regla de Laplace cuando los casos no son igualmente probables (por ejemplo, «llueve o no llueve» no es 50 %).
- Sumar probabilidades de sucesos que no son incompatibles sin restar la intersección.
- Olvidar que, sin devolución, cambian los casos posibles de la segunda extracción.
- Creer que, tras una racha, el resultado contrario es «más probable»: una moneda no tiene memoria.
- Dar una probabilidad mayor que 1 o negativa.

Probabilidad experimental

Definición: frecuencia relativa y ley de los grandes números

La **frecuencia relativa** de un suceso es el cociente entre el número de veces que ocurre y el número de veces que se repite el experimento. La **ley de los grandes números** afirma que, al repetir muchas veces un experimento, la frecuencia relativa de un suceso se aproxima cada vez más a su probabilidad. Por eso se puede estimar la probabilidad de sucesos cuando no se conocen los casos igualmente probables, como que una chincheta caiga con la punta hacia arriba.

Probabilidad en la vida diaria

Cuando la previsión del tiempo anuncia un 70 % de probabilidad de lluvia, no dice que lloverá el 70 % del día, sino que en situaciones meteorológicas parecidas ha llovido siete de cada diez veces. Las compañías de seguros calculan probabilidades para fijar el precio de una póliza, y los médicos las usan para valorar los riesgos de un tratamiento. Entender la probabilidad ayuda a tomar decisiones razonadas y a no dejarse engañar por los juegos de azar, en los que la ventaja siempre está del lado de quien organiza el juego.

¿Sabías que?

La teoría de la probabilidad nació en el siglo XVII, cuando un jugador francés, el caballero de Méré, planteó a Pascal un problema sobre cómo repartir las apuestas de un juego interrumpido. Pascal y Fermat intercambiaron cartas sobre él y sentaron las bases del cálculo de probabilidades. Hoy se aplica en los seguros, la medicina, la meteorología y la inteligencia artificial.

Juegos justos y valor esperado

Un juego es justo cuando todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar o cuando, a largo plazo, nadie gana ni pierde dinero. La probabilidad permite decidir si un juego es justo antes de jugarlo, sin necesidad de repetirlo cientos de veces.

Método: decidir si un juego es justo

1. Escribe el espacio muestral completo, con ayuda de una tabla o de un árbol.
2. Cuenta los casos favorables a cada jugador.
3. Calcula la probabilidad de ganar de cada uno con la regla de Laplace.
4. Si las probabilidades son iguales (o si las ganancias compensan las diferencias), el juego es justo.

Ejemplo 10

Marta y Luis lanzan dos monedas. Si salen dos caras, gana Marta; si sale una cara y una cruz, gana Luis. ¿Es justo?

El espacio muestral es $\{CC, CX, XC, XX\}$. Marta gana en 1 caso de 4, $P = \frac{1}{4}$; Luis gana en 2 casos, $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. No es justo. Muchos alumnos piensan que hay tres resultados (dos caras, dos cruces o una de cada) igual de probables, pero «una de cada» se puede obtener de dos formas distintas, CX y XC.

El consejo de Otto

Si el enunciado dice «al menos uno», calcula el contrario («ninguno») y réstalo de 1: es mucho más rápido.