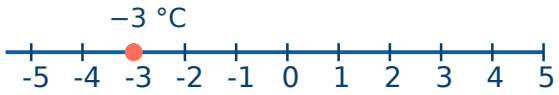
Apuntes - Números enteros, potencias y raíces

Curso: 2 Eso

En este tema ampliarás el cálculo con enteros: potencias de exponente entero, sus propiedades, raíces cuadradas y notación para números muy grandes.

Actividad de introducción: el termómetro de Nuria

Nuria vive en Burgos. El lunes por la mañana el termómetro del balcón marca -3 °C. A mediodía sube 5 grados y por la noche baja 8. Para saber cuál es la temperatura final no basta con contar: hay que sumar y restar números positivos y negativos con cuidado. Además, el martes la abuela le pregunta cuántos grados de diferencia hay entre el -3 de ayer y los 14 °C que hacen en Sevilla. ¿Sabrías responder? En este tema aprenderás a operar con enteros, a calcular potencias y raíces, y a escribir números enormes (la distancia a las estrellas) o diminutos (el tamaño de una bacteria) de forma abreviada.



Los números enteros y sus operaciones

Definición: número entero

Los **enteros** $\mathbb{Z}$ son los naturales, sus opuestos y el cero. Se ordenan en la recta: es mayor el que está más a la derecha, y $-2 > -7$. El **valor absoluto** $|a|$ es la distancia al cero.

Regla: operaciones con enteros

Suma: signos iguales, se suman y se deja el signo; signos distintos, se restan los valores absolutos y se deja el signo del mayor. **Producto y cociente:** signos iguales dan $+$, signos distintos dan $-$.

Ejemplo 1

Calcula $(-4)\cdot(-3)-(+15):(-5)+2$**.**

$12-(-3)+2=12+3+2=17.$

Método: operaciones combinadas

1. Paréntesis, de dentro hacia fuera.

2. Potencias y raíces.
3. Productos y divisiones, de izquierda a derecha.
4. Sumas y restas.

Ejemplo 2

Calcula $-2^2+(-3)^2\cdot 2-[5-(2-6)]$**.**

$-4+9\cdot 2-[5-(-4)]=-4+18-9=5.$

Potencias de exponente entero

Definición: potencia de exponente entero

$a^n=a\cdot a\cdots a$ (n factores). Además $a^0=1$ y $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ (con $a\neq 0$). Una potencia de base negativa es positiva si el exponente es par y negativa si es impar.

Ejemplo 3

Calcula 2^{-3}, $(-5)^2$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$**.**

$2^{-3}=\dfrac{1}{8}.\ (-5)^2=25.\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2}=\dfrac{9}{4}.$

Propiedades de las potencias

Regla: propiedades de las potencias

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\quad a^m:a^n=a^{m-n}\quad (a^m)^n=a^{m\cdot n}\quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}.$

Ejemplo 4

Simplifica $\dfrac{3^5\cdot 3^{-2}}{3^4}$**.**

$\dfrac{3^{5-2}}{3^4}=3^{3-4}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}.$

¡Atención!

a^m+a^n no es a^{m+n}: la regla del producto solo vale al multiplicar. Y $-3^2=-9$, pero $(-3)^2=9$.

Raíces cuadradas

Definición: raíz cuadrada

$\sqrt{a} = b$ si $b \geq 0$ y $b^2 = a$. Si a no es cuadrado perfecto, $\sqrt{a}$ es un número decimal infinito no periódico (irracional) y se aproxima. No existe la raíz cuadrada real de un número negativo.

Ejemplo 5

Halla $\sqrt{144}$, $\sqrt{0{,}25}$ y aproxima $\sqrt{50}$.

$\sqrt{144} = 12$, $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$. Como $7^2 = 49$ y $8^2 = 64$, $\sqrt{50} \approx 7{,}07$.

Potencias de 10 y números grandes

Definición: notación científica

Un número está en **notación científica** si se escribe $a \cdot 10^n$, con $1 \leq a$ y n entero. Sirve para números muy grandes ($n > 0$) o muy pequeños (n).

Ejemplo 6

Escribe 45 000 000 y 0,0000032 en notación científica.

$4{,}5 \cdot 10^7$ y $3{,}2 \cdot 10^{-6}$.

Ejemplo 7

La luz tarda 500 s en llegar del Sol a la Tierra y viaja a $3 \cdot 10^5$ km/s. ¿Qué distancia hay?

$500 \cdot 3 \cdot 10^5 = 1{,}5 \cdot 10^8$ km.

Observación

Para traducir un problema a enteros, usa positivos para ganancias o alturas sobre cero y negativos para deudas o profundidades.

Valor absoluto, opuesto y distancia entre enteros

Definición: valor absoluto y opuesto

El **valor absoluto** de un entero a, que se escribe $|a|$, es su distancia al 0 en la recta numérica: $|-7| = 7$ y $|5| = 5$. El **opuesto** de a es $-a$: el opuesto de 4 es -4 y el de

-9 es 9. Dos enteros opuestos tienen el mismo valor absoluto y están a la misma distancia del 0, uno a cada lado.

Propiedad: distancia entre dos enteros

La distancia entre dos enteros a y b es $|a-b|$. Por ejemplo, la distancia entre -4 y 14 es $|14-(-4)|=18$. Para calcularla basta restar el mayor menos el menor; así el resultado siempre es positivo, como corresponde a una distancia.

Ejemplo 8

Un buzo está a -25 m y sube hasta -7 m. ¿Cuántos metros ha subido? ¿Y qué distancia hay entre -25 m y la superficie?

Ha subido $-7-(-25)=-7+25=18$ m. La distancia a la superficie, que es el nivel 0, es $|-25|=25$ m.

Operaciones combinadas con enteros

Método: operaciones combinadas

1. Resuelve primero lo que haya dentro de los paréntesis y corchetes, empezando por los más interiores.
2. Calcula las potencias y las raíces.
3. Haz las multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha.
4. Termina con las sumas y restas, agrupando positivos por un lado y negativos por otro.
5. Comprueba el signo del resultado con una estimación.

Ejemplo 9

Calcula $-3\cdot[4-(2-7)]+(-2)^3:4$.

Paréntesis: $2-7=-5$. Corchete: $4-(-5)=9$. Producto: $-3\cdot 9=-27$. Potencia: $(-2)^3=-8$ y cociente: $-8:4=-2$. Suma: $-27+(-2)=-29$.

Ejemplo 10

Un submarinista desciende 12 m cada minuto durante 3 minutos y luego asciende 5 m cada minuto durante 2 minutos. ¿A qué profundidad queda?

Descenso: $(-12)\cdot 3=-36$ m. Ascenso: $(+5)\cdot 2=+10$ m. Posición final: $-36+10=-26$ m, es decir, a 26 m de profundidad.

¡Atención!

- Confundir $-2^4 = -16$ con $(-2)^4 = 16$: el signo solo entra en la potencia si está dentro del paréntesis.
- Pensar que $-(-3) = -3$: dos signos menos seguidos se compensan y dan $+3$.
- Sumar los valores absolutos al restar números de distinto signo: $-8 + 5$ no es -13, sino -3.
- Calcular de izquierda a derecha sin respetar la jerarquía: $2 + 3 \cdot 4$ vale 14, no 20.

Más sobre potencias

Definición: potencia de exponente negativo y cero

Para cualquier base $a \neq 0$ se define $a^0 = 1$ y $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Así, $5^0 = 1$, $2^{-3} = \frac{1}{8}$ y $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Un exponente negativo no hace negativo al número: indica que hay que invertir la base.

Propiedad: potencia de un producto y de un cociente

Se cumple $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Por ejemplo, $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1\,000$. No existe una regla parecida para sumas: $(2 + 3)^2 = 25$, pero $2^2 + 3^2 = 13$.

Ejemplo 11

Simplifica $\frac{2^5 \cdot (2^3)^2}{2^7}$.

$(2^3)^2 = 2^6$. Numerador: $2^5 \cdot 2^6 = 2^{11}$. Cociente: $2^{11-7} = 2^4 = 16$.

Ejemplo 12

Calcula $3^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

$3^{-2} = \frac{1}{9}$ y $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$. Suma: $\frac{1}{9} + 8 = \frac{73}{9}$.

¿Sabías que...?

Según la leyenda, el inventor del ajedrez pidió al rey un grano de trigo en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera y así duplicando hasta la casilla 64. El rey aceptó riendo, pero el total es $2^{64} - 1$ granos, un número de 20 cifras que ningún

reino podría pagar. Este ejemplo muestra la rapidez con la que crecen las potencias.

Raíces y números muy grandes o muy pequeños

Regla: notación científica con potencias de 10

Para escribir un número en notación científica se coloca la coma tras la primera cifra distinta de cero y se multiplica por 10^n, donde n es el número de lugares que se ha movido la coma: positivo si el número es grande, negativo si es menor que 1. Así, $7\,300\,000 = 7{,}3 \cdot 10^6$ y $0{,}0042 = 4{,}2 \cdot 10^{-3}$.

Ejemplo 13

La Luna está a $3{,}84 \cdot 10^5$ km de la Tierra. ¿A cuántos metros está? ¿Cuántas veces cabe esa distancia en la que hay al Sol ($1{,}5 \cdot 10^8$ km)?

En metros: $3{,}84 \cdot 10^5 \cdot 10^3 = 3{,}84 \cdot 10^8$ m. Veces: $\dfrac{1{,}5 \cdot 10^8}{3{,}84 \cdot 10^5} \approx 0{,}39 \cdot 10^3 \approx 391$ veces.

Método: cómo estimar una raíz cuadrada

1. Busca los dos cuadrados perfectos entre los que se encuentra el número.
2. La raíz estará entre las raíces de esos cuadrados: $\sqrt{50}$ está entre $\sqrt{49} = 7$ y $\sqrt{64} = 8$.
3. Prueba con decimales: $7{,}1^2 = 50{,}41$, un poco más de 50, así que $\sqrt{50} \approx 7{,}07$.
4. Comprueba elevando al cuadrado.

Potencias en la vida diaria

Las potencias de 10 están en las unidades que usamos: un kilómetro son 10^3 m, un milímetro 10^{-3} m y un micrómetro 10^{-6} m. En informática, un kilobyte son aproximadamente $2^{10} = 1\,024$ bytes y un megabyte 2^{20} bytes. Aprender a manejar potencias te ayuda a comparar tamaños con soltura.

Divisibilidad con enteros y potencias

La descomposición en factores primos se escribe con potencias, y las propiedades de las potencias permiten simplificar cálculos que parecen muy largos. Por ejemplo, para saber si un número es un cuadrado perfecto basta con mirar los exponentes de su descomposición: todos deben ser pares.

Propiedad: cuadrados perfectos y factores primos

Un número natural es un cuadrado perfecto si y solo si todos los exponentes de su

descomposición en factores primos son pares. Así, $144 = 2^4 \cdot 3^2$ es cuadrado perfecto y su raíz es $2^2 \cdot 3 = 12$; en cambio, $72 = 2^3 \cdot 3^2$ no lo es, porque el exponente de 2 es impar.

Ejemplo 14

Calcula $\dfrac{6^4 \cdot 2^3}{4^3 \cdot 3^2}$ sin calculadora.

Escribimos todas las bases como productos de primos: $6^4 = 2^4 \cdot 3^4$ y $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$. La expresión queda $\dfrac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^3}{2^6 \cdot 3^2} = \dfrac{2^7 \cdot 3^4}{2^6 \cdot 3^2} = 2^{7-6} \cdot 3^{4-2} = 2 \cdot 9 = 18$. Trabajar con potencias de bases primas evita multiplicar números grandes.

¡Atención! La raíz de una suma no es la suma de las raíces

$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, mientras que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Las raíces se pueden repartir en un producto, $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 6$, pero nunca en una suma o una resta. Tampoco existe la raíz cuadrada de un número negativo dentro de los números enteros: ningún entero al cuadrado da -16.

Ejemplo 15

¿Es 180 un cuadrado perfecto? ¿Por qué número hay que multiplicarlo, como mínimo, para obtener uno?

Descomponemos: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. El exponente de 5 es impar, así que 180 no es cuadrado perfecto. Si lo multiplicamos por 5, obtenemos $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, con todos los exponentes pares, y $\sqrt{900} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. El menor multiplicador es 5.

¿Sabías que...? La leyenda del ajedrez

Cuenta la leyenda que el inventor del ajedrez pidió como premio un grano de trigo por la primera casilla, dos por la segunda, cuatro por la tercera y así, duplicando, hasta la casilla 64. Solo la última casilla necesita 2^{63} granos, más de nueve trillones: más trigo del que se ha cosechado en toda la historia.

El consejo de Otto

Para trabajar con potencias, lleva todo a una misma base cuando se pueda ($8 = 2^3$, $9 = 3^2$) y aplica las propiedades. Y comprueba el signo antes de calcular.