Apuntes - Movimientos en el plano

Curso: 2 Eso

Los movimientos en el plano transforman figuras sin deformarlas. Verás las traslaciones, giros y simetrías, y cómo se usan para crear mosaicos.

Actividad de introducción: el espejo y el azulejo

Lucía se mira en el espejo del baño, que está decorado con azulejos que se repiten igual por toda la pared. Ve su imagen del revés, con la derecha donde estaba la izquierda; los azulejos se repiten cada 15 cm hacia la derecha; y el reloj de pared gira alrededor de su centro. Son tres movimientos del plano distintos: una simetría, una traslación y un giro. En todos ellos las figuras conservan su forma y su tamaño, aunque cambian de posición u orientación. En este tema aprenderás a describir y aplicar estos movimientos con coordenadas y a reconocerlos en el arte, la naturaleza y la arquitectura.



Qué es un movimiento

Definición: movimiento

Un **movimiento** (o isometría) es una transformación del plano que conserva las distancias y los ángulos: la figura transformada es igual que la original, solo cambia de posición.

Traslación

Definición: traslación

Una **traslación** de vector $\vec{v} = (a, b)$ desplaza cada punto a unidades en horizontal y b en vertical: $P(x, y) \to P'(x + a, y + b)$.

Ejemplo 1

Traslada el punto $A(2, -1)$ con vector $\vec{v} = (3, 4)$.

$A' = (2 + 3, -1 + 4) = (5, 3)$.

Giro

Definición: giro

Un **giro** queda determinado por un **centro** O, un **ángulo** y un sentido. Cada punto gira ese ángulo alrededor de O y mantiene su distancia al centro. Un giro de 180° es una simetría central.

Ejemplo 2

Gira el punto $A(3,0)$ 90° en sentido antihorario alrededor del origen.

$A' = (0,3)$. En general, $(x,y) \to (-y,x)$.

Simetría axial

Definición: simetría axial

La **simetría axial** respecto a un **eje** e lleva cada punto P a P' de modo que el eje es la mediatriz de PP'. Invierte la orientación de la figura.

Ejemplo 3

Halla el simétrico de $A(2,5)$ respecto al eje X y respecto al eje Y.

Respecto al eje X: $(2,-5)$. Respecto al eje Y: $(-2,5)$.

Simetría central

Definición: simetría central

La **simetría central** de centro O lleva P a P' de modo que O es el punto medio de PP'. Respecto al origen: $(x,y) \to (-x,-y)$.

Ejemplo 4

Halla el simétrico de $A(2,5)$ respecto al origen.

$A' = (-2,-5)$.

Figuras con simetría

Propiedad

Una figura tiene **simetría axial** si un eje la divide en dos mitades que coinciden al doblar. Tiene **simetría rotacional** si coincide consigo misma al girar un ángulo

menor de 360°. Un polígono regular de n lados tiene n ejes de simetría.

Composición de movimientos y teselaciones

Observación

Una **teselación** recubre el plano con copias de una figura sin huecos ni solapamientos, usando traslaciones, giros y simetrías. Solo tres polígonos regulares teselan solos: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono.

Ejemplo 5

¿Cuántos ejes de simetría tiene un rectángulo no cuadrado y un triángulo equilátero?

El rectángulo, 2. El triángulo equilátero, 3. El rectángulo tiene también simetría central, el triángulo no.

¡Atención!

La simetría axial no es lo mismo que un giro de 180°: la axial invierte la orientación, el giro no. Y el simétrico de un punto del eje es él mismo.

Movimientos e isometrías

Definición: movimiento

Un **movimiento** o **isometría** es una transformación del plano que conserva las distancias, y por tanto los ángulos y las áreas: la figura transformada tiene exactamente la misma forma y tamaño que la original. Los movimientos del plano son las traslaciones, los giros y las simetrías (axiales y centrales). Un movimiento puede conservar la orientación (traslación y giro) o invertirla (simetría axial).

Traslaciones con coordenadas

Regla: traslación de vector (a, b)

La traslación de vector $\vec{v} = (a, b)$ lleva cada punto $P(x, y)$ al punto $P'(x + a,\, y + b)$. Para volver al punto de partida se aplica el vector opuesto $-\vec{v} = (-a, -b)$. Dos traslaciones seguidas equivalen a una traslación cuyo vector es la suma de los vectores.

Ejemplo 6

Traslada el segmento de extremos $A(1, 2)$ y $B(4, 6)$ con el vector $(2, -3)$.

¿Cuánto mide el segmento antes y después?

$A' = (3, -1)$ y $B' = (6, 3)$. Antes: $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Después: $A'B' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. La longitud no cambia.

Simetrías: axial y central

Definición: simetría axial y central

En una **simetría axial** de eje e, cada punto P se transforma en P' de forma que e es la mediatriz del segmento PP': el punto y su imagen están a la misma distancia del eje, en lados opuestos. En una **simetría central** de centro M, el punto M es el punto medio de PP'. La simetría central equivale a un giro de 180° alrededor de M.

Ejemplo 7

Halla el simétrico de $P(5, 2)$ respecto al eje Y y respecto al punto $M(1, 0)$.

Eje Y: $(-5, 2)$. Centro M: $P' = 2M - P = (2 \cdot 1 - 5,\ 0 - 2) = (-3, -2)$. Comprobación: el punto medio de P y P' es $\left(\frac{5-3}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = (1, 0)$.

Método: dibujar el simétrico de una figura

1. Marca los vértices de la figura.
2. Desde cada vértice traza una recta perpendicular al eje (en la simetría axial) o pasa por el centro (en la central).
3. Mide la distancia al eje o al centro y llévala al otro lado.
4. Une los puntos obtenidos en el mismo orden.
5. Comprueba que el eje es mediatriz de cada segmento punto-imagen.

Giros

Propiedad: giro con centro el origen

Un giro de centro O y ángulo α lleva cada punto P a otro P' con $OP = OP'$ y que forma un ángulo α con OP. Los giros de 90° en sentido antihorario con centro en el origen transforman (x, y) en $(-y, x)$; los de 180°, (x, y) en $(-x, -y)$; y los de 270°, (x, y) en $(y, -x)$. Por convenio, los ángulos positivos se miden en sentido contrario a las agujas del reloj.

¡Atención!

- Confundir la simetría respecto al eje X, $(x, -y)$, con la simetría respecto al eje Y, $(-x, y)$.

- Pensar que la simetría axial conserva la orientación: la invierte (imagen en espejo).
- Olvidar que, al componer movimientos, el orden puede cambiar el resultado.
- Medir mal la distancia al eje: hay que medir en perpendicular.

Figuras con simetría y teselaciones

Orden de giro y número de ejes

Un polígono regular de n lados tiene n ejes de simetría y un giro mínimo de $\frac{360^\circ}{n}$ que lo deja igual (orden de giro n). Un rectángulo tiene 2 ejes y orden de giro 2; un paralelogramo no rectángulo ni rombo no tiene ejes pero sí centro de simetría. Un teselado cubre el plano con figuras que encajan sin huecos ni solapamientos; solo el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular lo consiguen siendo regulares y sin mezclar figuras.

Composición de movimientos

Propiedad: componer movimientos

Al aplicar un movimiento y después otro se obtiene un nuevo movimiento. Dos traslaciones dan una traslación; dos giros con el mismo centro dan un giro cuyo ángulo es la suma; dos simetrías respecto a ejes paralelos dan una traslación de vector perpendicular a los ejes y de longitud el doble de la distancia entre ellos; dos simetrías respecto a ejes que se cortan dan un giro de ángulo doble del que forman los ejes. El orden en que se aplican puede modificar el resultado, por lo que conviene escribirlo siempre.

Ejemplo 8

Aplica a $P(2,1)$ un giro de 90° antihorario con centro el origen y después una traslación de vector $(1,1)$.

Giro: $(2,1) \to (-1,2)$. Traslación: $(-1+1,\ 2+1) = (0,3)$. La imagen final es $(0,3)$. Si se hicieran en orden inverso: traslación $(3,2)$ y giro $(-2,3)$, que es distinto.

¿Sabías que?

En la Alhambra de Granada se encuentran los 17 tipos de grupos de simetría que los matemáticos demostraron en el siglo XIX que son los únicos posibles para decorar un plano repitiendo un motivo. Los artesanos nazaríes, sin conocer esa teoría, usaron traslaciones, giros y simetrías con una maestría asombrosa. El holandés Escher se inspiró en estos mosaicos para sus famosos dibujos.

Movimientos directos e inversos

Todos los movimientos conservan las distancias y los ángulos, pero no todos conservan la orientación de las figuras. Si escribimos una letra F y le aplicamos una traslación o un giro, la F sigue leyéndose bien; en cambio, si le aplicamos una simetría axial, aparece como en un espejo, «dada la vuelta».

Definición: movimiento directo e inverso

Un movimiento es **directo** si conserva la orientación de las figuras: el orden de los vértices en el sentido de las agujas del reloj no cambia. Las traslaciones, los giros y la simetría central son directos. Un movimiento es **inverso** si cambia la orientación, como la simetría axial.

Ejemplo 9

El triángulo $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(0,1)$ se lleva por simetría respecto al eje Y. ¿Cambia la orientación?

Las imágenes son $A'(0,0)$, $B'(-2,0)$ y $C'(0,1)$. Al recorrer $A \to B \to C$ giramos en sentido antihorario; al recorrer $A' \to B' \to C'$ giramos en sentido horario. La orientación ha cambiado, como corresponde a un movimiento inverso. Si después aplicamos otra simetría axial, la orientación vuelve a ser la inicial: dos movimientos inversos seguidos dan un movimiento directo.

El consejo de Otto

Para dibujar el simétrico de una figura, mueve solo sus vértices y luego únelos. Comprueba que cada vértice y su imagen estén a la misma distancia del eje o del centro.