Soluciones - Movimientos en el plano

Curso: 2 Eso

Solución del ejercicio 1

a. Para trasladar sumamos las coordenadas del vector a cada vértice. Se suma el vector a cada punto: $A'(2+3, 3-2) = (5, 1)$; $B'(-1+3, 4-2) = (2, 2)$; $C'(0+3, -2-2) = (3, -4)$.
b. Para deshacer la traslación usamos el vector opuesto. El vector opuesto $-\vec{v} = (-3, 2)$.
c. El módulo se calcula con el teorema de Pitágoras. $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$ unidades.
d. Una isometría no cambia la forma ni el tamaño. No cambian: la traslación es un movimiento (isometría) que conserva longitudes, ángulos y áreas.

Solución del ejercicio 2

a. El vector es la diferencia entre el punto final y el inicial. $\vec{v} = (6-1,\ -1-2) = (5, -3)$.
b. Sumamos el vector al punto B. $B' = (-2+5,\ 4-3) = (3, 1)$.
c. Restamos el vector al origen para encontrar el punto de partida. Es el punto $(0-5,\ 0+3) = (-5, 3)$.
d. La distancia recorrida es el módulo del vector. $|\vec{v}| = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$.

Comprobación: $A + \vec{v} = (1+5,\ 2-3) = (6, -1)$.

Solución del ejercicio 3

a. Respecto al eje X cambia el signo de la y; respecto al eje Y, el de la x. Eje X: $(3, -4)$. Eje Y: $(-3, 4)$.
b. Aplicamos las mismas reglas con un punto del tercer cuadrante. Eje X: $(-2, 5)$. Eje Y: $(2, -5)$.
c. Medimos la distancia horizontal al eje $x = 1$ y la llevamos al otro lado. R está a $4 - 1 = 3$ unidades del eje; el simétrico está 3 unidades al otro lado: $(1-3, 1) = (-2, 1)$.
d. Un punto del eje no se mueve al reflejarlo. Cualquier punto del propio eje X, es decir, de la forma $(a, 0)$.

Solución del ejercicio 4

a. Respecto al origen cambian de signo las dos coordenadas. $A'(-2, -5)$.

b. Aplicamos la misma regla a B. $B'(3,-1)$.
c. El centro es el punto medio, así que $P' = 2M - P$.
$P' = 2M - P = (2\cdot 1 - 4,\ 2\cdot 1 - 3) = (-2,-1)$.
d. Calculamos el punto medio de P y P'. Punto medio:
$\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = (1,1) = M$.

La simetría central equivale a un giro de 180° alrededor del centro.

Solución del ejercicio 5

a. Aplicamos $(x,y) \to (-y,x)$ con $x=2$, $y=1$: $A'(-1,2)$.
b. Con $x=-3$, $y=2$: la primera coordenada es $-y=-2$ y la segunda $x=-3$.
$B'(-2,-3)$.
c. En un giro de 180° cambian de signo las dos coordenadas: $A''(-2,-1)$.
d. Aplicamos $(x,y) \to (y,-x)$ con $x=4$, $y=-1$: $C'(-1,-4)$.

Comprobación: la distancia al origen se conserva; por ejemplo, $|A| = |A'| = \sqrt{5}$.

Solución del ejercicio 6

a. 3 ejes (las tres alturas, que también son medianas y bisectrices).
b. 4 ejes: 2 diagonales y 2 mediatrices de los lados.
c. 2 ejes: las mediatrices de los lados (las diagonales no son ejes).
d. 2 ejes: las dos diagonales.
e. 5 ejes, uno por cada vértice y el punto medio del lado opuesto.
f. Infinitos: cualquier diámetro es un eje de simetría.

Solución del ejercicio 7

a. El paralelogramo sí (centro: intersección de las diagonales). El trapecio isósceles no.
b. El hexágono regular sí; el triángulo equilátero no (un giro de 180° no lo hace coincidir).
c. Cuadrado: $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Hexágono: $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.
d. Orden 8 y ángulo mínimo $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Solución del ejercicio 8

a. Traslación: mismo sentido y orientación; se define por un vector.
b. Simetría axial: la orientación se invierte (imagen especular) respecto a un eje

vertical.
c. Giro de 90° en sentido horario con centro en ese vértice.
d. Simetría central (equivale a un giro de 180° alrededor del punto central).

Solución del ejercicio 9

a. Sumamos $(-2, 3)$ a cada vértice: $A'(-1, 4)$, $B'(2, 4)$, $C'(-1, 6)$.
b. Los dos segmentos son horizontales; restamos abscisas: $AB = 4 - 1 = 3$ y $A'B' = 2 - (-1) = 3$.
c. Es un triángulo rectángulo en A con catetos 3 y 2: Base 3, altura 2: $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ unidades cuadradas en los dos triángulos.
d. Aplicamos Pitágoras en los dos triángulos: $BC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ y $B'C' = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{13}$.

La traslación conserva longitudes y áreas, como se comprueba.

Solución del ejercicio 10

a. Aplicamos primero $(x, y) \to (-x, y)$ y luego sumamos $(2, 0)$: Simetría: $(-3, 1)$. Traslación: $(-3 + 2, 1) = (-1, 1)$.
b. Sumamos primero $(2, 0)$ y después cambiamos el signo de x: Traslación: $(5, 1)$. Simetría: $(-5, 1)$.
c. Comparamos los dos resultados: Sí: los resultados $(-1, 1)$ y $(-5, 1)$ son distintos. La composición de movimientos no es conmutativa en general.
d. Dos simetrías respecto al mismo eje se anulan: Primera: $(-3, 1)$. Segunda: $(3, 1)$. Se vuelve al punto de partida.

Solución del ejercicio 11

a. Dividimos 360° entre el ángulo del triángulo: $\frac{360}{60} = 6$ triángulos.
b. Hacemos lo mismo con cuadrados y hexágonos: Cuadrados: $\frac{360}{90} = 4$. Hexágonos: $\frac{360}{120} = 3$.
c. Comprobamos si 108 divide a 360: $\frac{360}{108} = 3{,}33\ldots$ no es entero y $3 \cdot 108 = 324$, $4 \cdot 108 = 432 > 360$: deja huecos o se solapa. No tesela.
d. Sumamos los tres ángulos que coinciden en el vértice: $135 + 135 + 90 = 360$. Encajan, y es el mosaico típico de octógonos y cuadrados.

Solo tres polígonos regulares teselan el plano por sí solos.

Solución del ejercicio 12

a. Dividimos la vuelta completa entre los 8 pétalos: $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.
b. Cualquier giro múltiplo del ángulo mínimo deja la figura igual: Los múltiplos de 45°: $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ$ y 360°.
c. Un giro de 180° es múltiplo de 45°, por eso hay simetría central: Sí tiene simetría central (giro de 180°). Tiene 8 ejes de simetría.
d. Dividimos el giro entre el ángulo entre pétalos: $\frac{135}{45} = 3$ pétalos.

El rosetón tiene orden de giro 8.

Solución del ejercicio 13

a. En un espejo plano la imagen es simétrica del objeto: Está a 2 m detrás del espejo (la misma distancia).
b. Sumamos la distancia de la niña y la de la imagen: $2 + 2 = 4$ m.
c. Las dos distancias disminuyen a la vez: Pasa a estar a 1,5 m del espejo; la distancia total es $1{,}5 + 1{,}5 = 3$ m.
d. Reflejamos respecto a la recta $x = 5$: Está a $5 - 3 = 2$ unidades del espejo; la imagen está en $x = 5 + 2 = 7$: $(7, 2)$.

Solución del ejercicio 14

a. Sumamos el vector a cada punto: $M' = (2 - 2, 3 + 4) = (0, 7)$ y $B' = (5 - 2, 1 + 4) = (3, 5)$.
b. Aplicamos Pitágoras y multiplicamos por 100 m: $MB = \sqrt{(5-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$ cuadrículas, es decir, unos 361 m.
c. Repetimos el cálculo con los puntos trasladados: $M'B' = \sqrt{(3-0)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{13}$: la misma distancia.
d. Explicamos el resultado: La traslación es un movimiento: conserva las distancias.

Solución del ejercicio 15

a. $A'(4, 1)$ y $B'(2, 3)$.
b. $AB = \sqrt{(-2+4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$ y $A'B' = \sqrt{(2-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8}$.
c. Es un trapecio isósceles: AA' y BB' son horizontales (paralelos) y los lados AB y $A'B'$ son iguales; el eje Y es su eje de simetría.
d. $AA' = 8$, $BB' = 4$, $AB = A'B' = \sqrt{8}$. Perímetro: $12 + 2\sqrt{8} \approx 17{,}66$. Altura: 2. Área: $\frac{(8+4) \cdot 2}{2} = 12$ unidades cuadradas.

Solución del ejercicio 16

a. Dividimos cada medida entre el lado de la baldosa, en las mismas unidades: $500 : 50 = 10$ a lo largo y $300 : 50 = 6$ a lo ancho.
b. Multiplicamos filas por columnas: $10 \cdot 6 = 60$ baldosas.
c. Multiplicamos el número de baldosas por su precio: $60 \cdot 3{,}2 = 192$ €.
d. Dividimos 360° entre el ángulo de cada polígono: Triangulares: $\frac{360}{60} = 6$. Hexagonales: $\frac{360}{120} = 3$.
e. Cada baldosa se obtiene desplazando la anterior: Una traslación de vector horizontal de 50 cm.

Respuesta: 60 baldosas que cuestan 192 €.

Solución del ejercicio 17

a. Dividimos 360° entre las 12 cabinas: $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.
b. Dividimos el giro entre el ángulo entre cabinas: $\frac{150}{30} = 5$ posiciones: la cabina 1 pasa a ocupar el lugar que tenía la cabina 6 (si se cuenta en el sentido del giro).
c. La posición opuesta está a media vuelta: Un giro de 180° (que mueve 6 posiciones).
d. Sumamos giros hasta completar una vuelta: 4 giros de 90° suman 360°.

Solución del ejercicio 18

a. Aplicamos $(x, y) \to (-y, x)$ a cada vértice: Con $(x, y) \to (-y, x)$: $A'(0, 1)$, $B'(0, 3)$, $C'(-2, 1)$.
b. Restamos las coordenadas que cambian: $AB = 3 - 1 = 2$ y $A'B' = 3 - 1 = 2$.
c. Calculamos el área con los dos catetos: Triángulo rectángulo de catetos 2 y 2: área $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$ antes y después.
d. En un giro de 180° cambian de signo las dos coordenadas: $C''(-1, -2)$.

El giro es un movimiento: conserva longitudes y áreas.

Solución del ejercicio 19

a. Calculamos el punto medio de cada diagonal: $M_{AC} = \left(\frac{0+5}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (2{,}5;\ 2)$.
$M_{BD} = \left(\frac{4+1}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (2{,}5;\ 2)$.

b. Comparamos los dos puntos medios: Las diagonales se cortan en su punto medio: es un paralelogramo y M es su centro de simetría.
c. Con centro M, cada vértice va al opuesto: $A \to C(5,4)$ y $B \to D(1,3)$.
d. Calculamos el área del triángulo y la duplicamos: Área de ABD: $\frac{|4 \cdot 3 - 1 \cdot 1|}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$. Área del paralelogramo: 11 unidades cuadradas.

Solución del ejercicio 20

a. P está a 1 unidad del eje, $P_1 = (2,2)$.
b. P_1 está a 2 unidades de $x = 4$ por la izquierda: $P_2 = (4+2,2) = (6,2)$.
c. Una traslación de vector $(6,0)$, que es el doble de la distancia entre las rectas ($2 \cdot 3 = 6$) y es perpendicular a ellas.
d. Un giro de centro el punto de corte y ángulo doble del que forman las rectas: 60°.