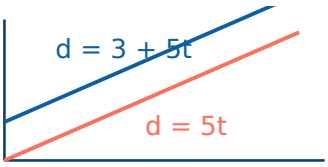
# Apuntes - Funciones lineales y afines

Curso: 2 Eso

Las funciones lineales y afines describen situaciones de crecimiento constante: tarifas, velocidades, ahorros. Su gráfica es siempre una recta.

**Actividad de introducción: caminar a ritmo constante**

Sara sale a caminar por el Retiro, en Madrid, a un ritmo constante de 5 kilómetros por hora. A la media hora lleva 2,5 km, a la hora 5 km, a las dos horas 10 km. Si anotamos el tiempo y la distancia en una tabla, vemos que cada vez que el tiempo aumenta una hora, la distancia aumenta 5 km. Esa regularidad se resume en una fórmula, $d = 5t$, y al dibujarla en unos ejes sale una línea recta. Otro día Sara empieza ya a 3 km de casa y camina al mismo ritmo: ahora $d = 3 + 5t$. Las funciones lineales y afines describen situaciones con cambio constante, y en este tema aprenderás a escribirlas, representarlas e interpretarlas.




## Funciones y formas de representarlas

**Definición: función**

Una **función** asigna a cada valor de la variable independiente $x$ un único valor de la dependiente $y = f(x)$. Se puede representar con un enunciado, una tabla, una gráfica o una fórmula. El **dominio** es el conjunto de valores de $x$ para los que está definida.

## Función lineal: proporcionalidad directa

**Definición: función lineal**

Una **función lineal** es $y = mx$. Su gráfica es una recta que pasa por el origen y $m$ es la **pendiente**: lo que aumenta $y$ cuando $x$ aumenta 1.

## Función afín: la recta $y = mx + n$

**Definición: función afín**

Una **función afín** es $y = mx + n$. $m$ es la pendiente y $n$ la **ordenada en el origen** (valor de $y$ cuando $x = 0$). Si $m > 0$ crece, si $m$ decrece y si $m = 0$ es constante.

**Propiedad**

Dados dos puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ de una recta, la pendiente es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

## Cómo representar una recta

**Método: representar una recta**

1. Haz una tabla con al menos dos valores de $x$.
2. Calcula las $y$ correspondientes.
3. Marca los puntos y traza la recta con una regla.

**Ejemplo 1**

**Representa $y = 2x - 3$.**

Para $x = 0$, $y = -3$. Para $x = 2$, $y = 1$. Se unen los puntos $(0, -3)$ y $(2, 1)$.

## Cortes con los ejes

**Regla: puntos de corte**

Corte con el eje Y: $x = 0$, el punto es $(0, n)$. Corte con el eje X: $y = 0$, se resuelve $mx + n = 0$ y $x = -\dfrac{n}{m}$.

**Ejemplo 2**

**Halla los cortes de $y = -2x + 6$.**

Eje Y: $(0, 6)$. Eje X: $-2x + 6 = 0$, $x = 3$, $(3, 0)$.

## Hallar la ecuación de una recta

**Método: ecuación de la recta que pasa por dos puntos**

1. Calcula la pendiente $m$.
2. Sustituye un punto en $y = mx + n$ y despeja $n$.
3. Escribe $y = mx + n$.

**Ejemplo 3**

**Halla la recta que pasa por $A(1, 3)$ y $B(3, 7)$.**

$m = \dfrac{7-3}{3-1} = 2$. Con $A$: $3 = 2 \cdot 1 + n$, $n = 1$. La recta es $y = 2x + 1$.

## Rectas paralelas y puntos de corte

**Propiedad**

Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente. Se cortan donde tienen el mismo valor de $y$: se resuelve el sistema formado por sus ecuaciones.

**Ejemplo 4**

**Halla el corte de $y = x + 2$ y $y = -2x + 8$.**

$x + 2 = -2x + 8$, $3x = 6$, $x = 2$, $y = 4$. Se cortan en $(2, 4)$.

## Funciones afines en problemas

**Ejemplo 5**

**Una tarifa de móvil cuesta 5 € fijos más 0,10 € por minuto. Escribe la función y calcula el coste de 80 min.**

$y = 5 + 0{,}10x$. Para $x = 80$: $y = 13$ €.

**Ejemplo 6**

**Un depósito tiene 200 l y pierde 4 l por hora. ¿Cuándo se vacía?**

$y = 200 - 4x$. $200 - 4x = 0$, $x = 50$ h.

**¡Atención!**

La pendiente no es el corte con el eje Y. Y una recta como $y = 3$ es horizontal, no vertical.

## Qué es una función

**Definición: función**

Una **función** es una relación entre dos magnitudes en la que a cada valor de la variable independiente $x$ le corresponde un único valor de la variable dependiente $y$. Se puede dar con una tabla, una fórmula, una gráfica o un enunciado. Una gráfica corresponde a una función si cualquier recta vertical la corta, como mucho, en un punto.

**Ejemplo 7**

**Una función viene dada por $f(x) = \frac{x}{2} + 3$. Calcula $f(4)$, $f(-6)$ y el valor de $x$ para el que $f(x) = 7$.**

$f(4) = \frac{4}{2} + 3 = 5$. $f(-6) = -3 + 3 = 0$. Para $f(x) = 7$: $\frac{x}{2} + 3 = 7$, $\frac{x}{2} = 4$ y $x = 8$.

## Pendiente y ordenada en el origen

**Propiedad: la recta $y = mx + n$**

La gráfica de $y = mx + n$ es una recta. La **pendiente** $m$ indica cuánto aumenta $y$ cuando $x$ aumenta una unidad: si $m > 0$ la recta sube, si $m$ baja y si $m = 0$ es horizontal. La **ordenada en el origen** $n$ es el valor de $y$ cuando $x = 0$, es decir, el punto donde la recta corta al eje vertical. Cuando $n = 0$, la recta pasa por el origen y la función es de proporcionalidad directa.

**Ejemplo 8**

**Calcula la pendiente de la recta que pasa por $(2, 1)$ y $(6, 9)$ y escribe su ecuación.**

$m = \frac{9 - 1}{6 - 2} = 2$. Entonces $y = 2x + n$ y con $(2, 1)$: $1 = 4 + n$, $n = -3$. La ecuación es $y = 2x - 3$.

## Cómo representar una recta

**Método: dibujar una recta**

1. Elige dos o tres valores de $x$, mejor sencillos (por ejemplo $-1$, $0$ y $2$).
2. Calcula el valor de $y$ de cada uno con la fórmula.
3. Marca los puntos en unos ejes con la misma escala en los dos ejes.
4. Une los puntos con una regla: la recta continúa más allá de ellos.
5. Comprueba con un tercer punto que está alineado con los otros dos.

**¡Atención!**

- Confundir la pendiente con la ordenada: en $y = -3x + 5$ la pendiente es $-3$ y la ordenada es 5.
- Calcular la pendiente como $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$: se divide la variación de $y$ entre la de $x$.
- Cambiar el signo de un solo término al restar las coordenadas: hay que restar en el mismo orden arriba y abajo.

- Pensar que dos rectas con distinta ordenada se cortan siempre: si tienen la misma pendiente son paralelas.

## Ecuación de una recta y puntos de corte

**Método: hallar la ecuación de una recta**

1. Si conoces dos puntos, calcula la pendiente con $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
2. Escribe $y = mx + n$ con ese valor de $m$.
3. Sustituye las coordenadas de uno de los puntos para despejar $n$.
4. Comprueba con el otro punto.

**Regla: punto de corte de dos rectas**

Para hallar el punto donde se cortan $y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$ se igualan las dos expresiones: $m_1x + n_1 = m_2x + n_2$. Se despeja $x$ y después se calcula $y$ sustituyendo en cualquiera de las dos rectas. Si las pendientes son iguales y las ordenadas distintas no hay solución (son paralelas); si son iguales y además $n_1 = n_2$, son la misma recta.

**Ejemplo 9**

**Halla el corte de $y = 2x - 1$ e $y = -x + 5$.**

Igualamos: $2x - 1 = -x + 5$, $3x = 6$, $x = 2$. Entonces $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. El punto de corte es $(2, 3)$. Comprobación en la otra recta: $-2 + 5 = 3$.

**¿Sabías que?**

Las coordenadas cartesianas se llaman así por el filósofo y matemático René Descartes, que en el siglo XVII tuvo la idea de situar cada punto del plano con dos números. Gracias a esa idea, las figuras geométricas pueden estudiarse con ecuaciones y las ecuaciones pueden dibujarse. Hoy la usan los mapas de los móviles, los videojuegos y cualquier programa que dibuje gráficas.

## Funciones lineales en situaciones reales

**Interpretar pendiente y ordenada**

En una tarifa de móvil, la ordenada en el origen es la cuota fija y la pendiente es el precio de cada unidad. En un depósito que se vacía, la pendiente es negativa y representa los litros que se pierden cada minuto. En un taxi, la bajada de bandera es la ordenada y el precio por kilómetro es la pendiente. Cuando resuelvas un problema, escribe siempre qué significan $m$ y $n$ con sus unidades: es la mejor manera de comprobar que el resultado tiene sentido.

**Ejemplo 10**

**Una empresa cobra 5 € de envío más 0,30 € por kilo. Escribe la función, represéntala con dos puntos y calcula el coste de un paquete de 12 kg.**

$C(x) = 5 + 0{,}3x$. Puntos: $(0, 5)$ y $(10, 8)$. Para 12 kg: $C(12) = 5 + 3{,}6 = 8{,}60$ €. La pendiente 0,30 son los euros por kilo y la ordenada 5 es el envío fijo.

## Leer la pendiente en la gráfica

La pendiente de una recta se puede leer directamente en su gráfica, sin hacer cálculos con la fórmula. Basta con elegir dos puntos de la recta que caigan en cruces de la cuadrícula y contar cuántas unidades se avanza en horizontal y cuántas se sube o se baja en vertical.

**Método: pendiente a partir de la gráfica**

1. Elige dos puntos de la recta con coordenadas enteras.
2. Cuenta el avance horizontal de izquierda a derecha entre ellos.
3. Cuenta la subida (positiva) o la bajada (negativa) en vertical.
4. Divide: pendiente = variación vertical : variación horizontal.

**Ejemplo 11**

**Una recta pasa por $(0, 4)$ y, avanzando 3 unidades a la derecha, baja 2 unidades. Escribe su ecuación.**

La pendiente es $m = \dfrac{-2}{3}$, negativa porque la recta baja. Como corta al eje vertical en 4, la ordenada en el origen es $n = 4$. La ecuación es $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$. Comprobación: con $x = 3$, $y = -2 + 4 = 2$, que es el punto al que se llega tras bajar 2 unidades desde 4.

**¡Atención! Las escalas de los ejes**

Si en el eje horizontal cada cuadrado vale 1 y en el vertical vale 10, una recta de pendiente 10 parecerá tan inclinada como una de pendiente 1 dibujada con la misma escala en los dos ejes. Antes de leer la pendiente en una gráfica, mira siempre cuánto vale cada división de cada eje.

**El consejo de Otto**

Para dibujar una recta rápido, marca primero $(0, n)$ y sube $m$ unidades por cada una que avanzas a la derecha. Comprueba con un tercer punto.