Soluciones - Funciones lineales y afines

Curso: 2 Eso

Solución del ejercicio 1

a. El cociente $\frac{y}{x} = 3$ es constante: proporcionalidad directa, $y = 3x$.
b. y aumenta 2 cuando x aumenta 1, pero $\frac{y}{x}$ no es constante ($5,\ 3{,}5,\ 3\ldots$). Es una función afín: $y = 2x + 3$.
c. $\frac{y}{x} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ constante y pasa por el origen: $y = 2{,}5x$.
d. y disminuye 2 cada vez que x aumenta 1: pendiente -2. Con $x = 1$, $y = 8$: $y = -2x + 10$. No es proporcional.

Solución del ejercicio 2

a. Sustituimos cada valor de x en la fórmula: $f(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$; $f(0) = -3$; $f(4) = 8 - 3 = 5$.
b. Igualamos la función a 9 y despejamos: $2x - 3 = 9$, $2x = 12$, $x = 6$.
c. Igualamos a 0; el resultado es el corte con el eje X: $2x - 3 = 0$, $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$.
d. Un punto pertenece a la gráfica si al sustituir x se obtiene su y: $f(5) = 10 - 3 = 7$. El punto $(5, 7)$ sí pertenece a la gráfica y el $(5, 8)$ no.

Solución del ejercicio 3

a. Comparamos con $y = mx + n$: $m = 3$, $n = 1$. Creciente porque $m > 0$.
b. La x está multiplicada por $-\frac{1}{2}$: $m = -\frac{1}{2}$, $n = 4$. Decreciente porque m.
c. No aparece la x, así que la pendiente es cero: $m = 0$, $n = 5$. Constante (recta horizontal).
d. No hay término independiente, así que $n = 0$: $m = -2$, $n = 0$. Decreciente; pasa por el origen.

El signo de la pendiente decide si la recta sube o baja de izquierda a derecha.

Solución del ejercicio 4

a. $x = -2$: -5; $x = -1$: -3; $x = 0$: -1; $x = 1$: 1; $x = 2$: 3.
b. Se marcan los puntos $(-2, -5), (-1, -3), (0, -1), (1, 1), (2, 3)$ y se traza la recta que los une.

c. Eje Y: $x = 0$, $y = -1$, punto $(0, -1)$. Eje X: $y = 0$, $2x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$, punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
d. $2 \cdot 10 - 1 = 19$. Sí pasa por $(10, 19)$.

Solución del ejercicio 5

a. Para el eje Y hacemos $x = 0$; para el eje X, $y = 0$. Eje Y: $(0, 6)$. Eje X: $-3x + 6 = 0$, $x = 2$, punto $(2, 0)$.
b. Con $x = 0$ obtenemos la ordenada en el origen: Eje Y: $(0, 1)$. Eje X: $\frac{x}{2} + 1 = 0$, $x = -2$, punto $(-2, 0)$.
c. Primero despejamos y para tener la forma explícita: Despejamos: $2y = 8 - 4x$, $y = -2x + 4$. Eje Y: $(0, 4)$. Eje X: $-2x + 4 = 0$, $x = 2$, punto $(2, 0)$.

Con los dos cortes ya se puede dibujar cada recta.

Solución del ejercicio 6

a. Restamos ordenadas y abscisas en el mismo orden: $m = \frac{8 - 2}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$.
b. Atención a restar un número negativo: $m = \frac{-3 - 5}{2 - (-2)} = \frac{-8}{4} = -2$.
c. Las dos ordenadas son iguales: $m = \frac{3 - 3}{6 - 0} = 0$: recta horizontal.
d. Las dos abscisas son iguales: $m = \frac{7 - 1}{2 - 2} = \frac{6}{0}$ no existe: es una recta vertical $x = 2$, que no es la gráfica de una función.

La pendiente indica cuánto cambia y por cada unidad que aumenta x.

Solución del ejercicio 7

a. Sustituimos el punto en $y = 3x + n$ para hallar n: $y = 3x + n$. Con $(1, 5)$: $5 = 3 + n$, $n = 2$. $y = 3x + 2$.
b. Sustituimos el punto en $y = -2x + n$: $y = -2x + n$. Con $(-1, 4)$: $4 = 2 + n$, $n = 2$. $y = -2x + 2$.
c. Calculamos la pendiente con los dos puntos; el primero da directamente n: $m = \frac{7 - 1}{3 - 0} = 2$ y $n = 1$ (corta al eje Y en 1). $y = 2x + 1$.
d. Calculamos la pendiente y después n con uno de los puntos: $m = \frac{1 - 3}{6 - 2} = -\frac{1}{2}$. Con $(2, 3)$: $3 = -1 + n$, $n = 4$. $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Comprueba siempre que el otro punto también cumple la ecuación.

Solución del ejercicio 8

a. Comparamos las pendientes: Las dos tienen pendiente 2 y ordenadas distintas: son paralelas (no se cortan).
b. Igualamos las dos expresiones de y y sustituimos: $x+3=-x+7$, $2x=4$, $x=2$, $y=5$. Punto $(2,5)$.
c. Igualamos y despejamos x: $3x-2=2x+1$, $x=3$, $y=7$. Punto $(3,7)$.
d. Una paralela conserva la pendiente: Pendiente -1 y ordenada 5: $y=-x+5$.

Solución del ejercicio 9

a. Parte fija más 1,50 € por entrada: $C(x)=12+1{,}5x$.
b. Sustituimos $x=10$: $C(10)=12+15=27$ €.
c. Igualamos el coste a 45 y despejamos: $12+1{,}5x=45$, $1{,}5x=33$, $x=22$ entradas.
d. Pendiente y ordenada tienen un significado en el problema: Pendiente 1,5: cada entrada cuesta 1,50 €. Ordenada 12: el bono cuesta 12 € aunque no se use ninguna entrada.

Solución del ejercicio 10

a. $d(t)=80t$. Valores: $0;\ 40;\ 80;\ 160;\ 240$ km.
b. Sí, es de proporcionalidad directa. Pasa por el origen porque con $t=0$ no se ha recorrido nada.
c. $80t=360$, $t=4{,}5$ h.
d. El segundo: $100(t-1)$. Igualamos: $80t=100t-100$, $100=20t$, $t=5$ h tras salir el primero; distancia: 400 km.

Solución del ejercicio 11

a. Cada kilómetro gasta $6:100=0{,}06$ litros. Consume 0,06 L/km: $V(x)=45-0{,}06x$.
b. Sustituimos $x=250$: $V(250)=45-15=30$ L.
c. Igualamos los litros a 5: $45-0{,}06x=5$, $0{,}06x=40$, $x\approx 666{,}7$ km.
d. Igualamos los litros a 0: $45-0{,}06x=0$, $x=750$ km.

La función es decreciente porque el depósito se vacía.

Solución del ejercicio 12

a. Temperatura inicial más 5 °C por minuto: $T(t) = 20 + 5t$. Valores: 20, 30, 40, 50 °C.
b. Igualamos a 100 °C y despejamos: $20 + 5t = 100$, $5t = 80$, $t = 16$ min.
c. Bastan dos puntos para trazar una recta: Se marcan $(0, 20)$ y $(16, 100)$ y se traza la recta.
d. Interpretamos los coeficientes: Pendiente 5: sube 5 °C por minuto. Ordenada 20: temperatura inicial.

Solución del ejercicio 13

a. Lucía: $L(x) = 40 + 15x$. Marcos: $M(x) = 100 + 5x$.
b. Semana 0: 40 y 100; 1: 55 y 105; 2: 70 y 110; 3: 85 y 115; 4: 100 y 120; 5: 115 y 125; 6: 130 y 130.
c. $40 + 15x = 100 + 5x$, $10x = 60$, $x = 6$ semanas (130 € cada uno).
d. Semana 10: Lucía 190 €, Marcos 150 €. Lucía tiene 40 € más.

Solución del ejercicio 14

a. Altura inicial menos lo que se consume: $h(t) = 24 - 1{,}5t$.
b. Sustituimos $t = 6$: $h(6) = 24 - 9 = 15$ cm.
c. La vela se acaba cuando la altura es cero: $24 - 1{,}5t = 0$, $t = 16$ h.
d. Solo tienen sentido los tiempos entre el encendido y el final: El tiempo no es negativo y la vela se acaba a las 16 horas: dominio $0 \leq t \leq 16$.

Es una función afín decreciente de pendiente $-1{,}5$.

Solución del ejercicio 15

a. $A(x) = 30 + 0{,}2x$ y $B(x) = 50 + 0{,}1x$.
b. 100 km: A 50 €, B 60 €. 200 km: A 70 €, B 70 €. 300 km: A 90 €, B 80 €.
c. $30 + 0{,}2x = 50 + 0{,}1x$, $0{,}1x = 20$, $x = 200$ km (70 € en ambas).
d. 250 km: A 80 € y B 75 €: conviene B. 120 km: A 54 € y B 62 €: conviene A.
e. Las rectas se cortan en $(200, 70)$; a la izquierda A está por debajo y a la derecha B está por debajo.

Solución del ejercicio 16

a. $h(t) = 12 + 2{,}5t$. Semanas 0 a 4: 12; 14,5; 17; 19,5; 22 cm.
b. $h(10) = 12 + 25 = 37$ cm.
c. $12 + 2{,}5t = 50$, $2{,}5t = 38$, $t = 15{,}2$ semanas.
d. $12 + 2{,}5t = 30 + t$, $1{,}5t = 18$, $t = 12$ semanas (42 cm).
e. A las 30 semanas: primera 87 cm, segunda 60 cm. La primera es más alta.

Solución del ejercicio 17

a. Uno parte de 30 m y sube; el otro parte de 150 m y baja: Primero: $h_1 = 30 + 4t$. Segundo: $h_2 = 150 - 6t$.
b. Igualamos las alturas: $30 + 4t = 150 - 6t$, $10t = 120$, $t = 12$ s. Altura: $30 + 48 = 78$ m.
c. El segundo llega al suelo cuando su altura es 0: $150 - 6t = 0$, $t = 25$ s.
d. Sustituimos $t = 25$ en la del primero: $h_1(25) = 30 + 100 = 130$ m.

Comprobación: $150 - 6 \cdot 12 = 78$ m.

Solución del ejercicio 18

a. Los costes tienen parte fija y parte variable; los ingresos, solo variable: $C(x) = 200 + 4x$ e $I(x) = 9x$.
b. Restamos los costes a los ingresos, cambiando los signos del paréntesis: $B(x) = 9x - (200 + 4x) = 5x - 200$.
c. No hay pérdidas a partir de beneficio cero: $5x - 200 = 0$, $x = 40$ camisetas.
d. Sustituimos $x = 100$: $B(100) = 500 - 200 = 300$ €.

Cada camiseta deja 5 € de margen, que primero cubre los 200 € fijos.

Solución del ejercicio 19

a. Calculamos la pendiente con los dos puntos: $m = \dfrac{300 - 500}{10 - 0} = -20$: pierde 20 litros por minuto.
b. La ordenada en el origen es el volumen inicial: $V(t) = 500 - 20t$.
c. Se vacía cuando $V = 0$: $500 - 20t = 0$, $t = 25$ min.
d. Sustituimos y resolvemos: $V(7) = 500 - 140 = 360$ L. $500 - 20t = 100$, $20t = 400$, $t = 20$ min.

Solución del ejercicio 20

a. Calculamos los cortes con los ejes: Cortes: $(0, 6)$ y $(3, 0)$. Triángulo rectángulo con catetos 3 y 6: área $= \dfrac{3 \cdot 6}{2} = 9$.
b. Sustituimos $x = 2$ en la recta: $k = 3 \cdot 2 - 1 = 5$.
c. Hallamos la recta por A y B e imponemos que pase por C: Pendiente AB: $\dfrac{5 - 1}{2 - 0} = 2$; la recta es $y = 2x + 1$. En $x = 5$: $k = 11$.
d. Usamos la misma pendiente y el punto dado: Pendiente -1: $y = -x + n$. Con $(2, 3)$: $3 = -2 + n$, $n = 5$. $y = -x + 5$.