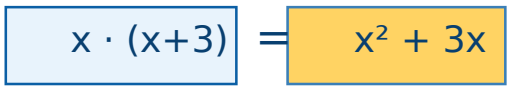
Apuntes - Expresiones algebraicas

Curso: 2 Eso

Las expresiones algebraicas generalizan los cálculos numéricos. En este tema operas con monomios y polinomios y usas las identidades notables y el factor común.

Actividad de introducción: el truco de la calculadora

Laura propone un juego a su hermano Sergio: «Piensa un número, súmale 3, multiplica por 2, resta 6 y dime el resultado. Yo te digo el número que pensaste». Sergio dice 20 y Laura responde enseguida: «pensaste el 10». ¿Cuál es el truco? Si x es el número, las operaciones son $(x+3)\cdot 2-6=2x$, así que el resultado es el doble del número y basta dividir entre 2. El álgebra sirve para explicar trucos como este, para escribir fórmulas con letras (el área, el precio de una tarifa, la distancia) y para resolver problemas con datos desconocidos. En este tema aprenderás a manejar esas expresiones con soltura.



Expresiones algebraicas y valor numérico

Definición: expresión algebraica

Una **expresión algebraica** combina números y letras con operaciones. El **valor numérico** es el resultado de sustituir las letras por números.

Ejemplo 1

Halla el valor numérico de $3a^2-2ab$ para $a=-1$ y $b=4$.

$3\cdot 1-2\cdot(-1)\cdot 4=3+8=11$.

Monomios

Definición: monomio

Un **monomio** es una expresión ax^n con coeficiente a y grado n. Son **semejantes** los que tienen la misma parte literal.

Regla: operaciones con monomios

Se suman monomios semejantes sumando coeficientes. Se multiplican: coeficientes

por coeficientes y exponentes sumados. Se dividen: coeficientes entre coeficientes y exponentes restados.

Ejemplo 2

Calcula $(6x^3)\cdot(-2x^2)$ y $(12a^5):(3a^2)$.

$-12x^5$ y $4a^3$.

Polinomios

Definición: polinomio

Un **polinomio** es una suma de monomios no semejantes. Su **grado** es el del monomio de mayor grado y el **término independiente** es el de grado 0.

Ejemplo 3

Dados $P=3x^2-2x+1$ y $Q=x^2+4x-5$, calcula $P+Q$, $P-Q$ y $P\cdot(x-1)$.

$P+Q=4x^2+2x-4$. $P-Q=2x^2-6x+6$.
$P\cdot(x-1)=3x^3-3x^2-2x^2+2x+x-1=3x^3-5x^2+3x-1$.

¡Atención!

Al restar un polinomio hay que cambiar el signo de todos sus términos, no solo del primero.

Identidades notables

Regla: identidades notables

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Ejemplo 4

Desarrolla $(x+5)^2$, $(2x-3)^2$ y $(x+4)(x-4)$.

$x^2+10x+25$. $4x^2-12x+9$. x^2-16.

¡Atención!

$(a+b)^2$ no es a^2+b^2: falta el doble producto $2ab$.

Factor común

Método: sacar factor común

1. Busca el mcd de los coeficientes.
2. Busca las letras comunes con su menor exponente.
3. Escribe el factor común y divide cada término entre él.

Ejemplo 5

Factoriza $12x^3 - 18x^2 + 6x$.

Factor común $6x$: $6x\,(2x^2 - 3x + 1)$.

Del lenguaje común al lenguaje algebraico

Ejemplo 6

Escribe: «el área de un cuadrado cuyo lado es 3 más que x» y desarróllala.

$A = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Expresiones en problemas

Ejemplo 7

Un rectángulo tiene base $x+4$ y altura x. Expresa su perímetro y su área.

Perímetro $= 2(x+4) + 2x = 4x + 8$. Área $= x(x+4) = x^2 + 4x$.

Monomios semejantes y operaciones

Definición: monomios semejantes

Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal (las mismas letras con los mismos exponentes). Solo se pueden sumar o restar monomios semejantes, y el resultado se obtiene sumando o restando los coeficientes y dejando la parte literal: $4x^2y + 3x^2y = 7x^2y$. En cambio, $4x^2y + 3xy^2$ no se puede reducir, porque las partes literales son distintas.

Ejemplo 8

Reduce $2x^2 - 5x + 7x^2 - x + 4 - 9$.

Agrupamos los semejantes: x^2: $2 + 7 = 9$; x: $-5 - 1 = -6$; independientes: $4 - 9 = -5$. Resultado: $9x^2 - 6x - 5$.

Producto de polinomios

Método: multiplicar polinomios

1. Multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo, cuidando los signos.
2. Aplica la regla de los exponentes: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$.
3. Agrupa los monomios semejantes.
4. Ordena el resultado de mayor a menor grado.
5. Comprueba sustituyendo un valor, por ejemplo $x = 1$ o $x = 2$, en el producto inicial y en el final.

Ejemplo 9

Desarrolla $(x-3)(2x^2+x-4)$ y comprueba con $x=2$.

$x \cdot 2x^2 + x \cdot x + x \cdot (-4) - 3 \cdot 2x^2 - 3 \cdot x - 3 \cdot (-4) = 2x^3 + x^2 - 4x - 6x^2 - 3x + 12 = 2x^3 - 5x^2 - 7x + 12$. Comprobación con $x = 2$: $(2-3)(8+2-4) = -6$ y $16 - 20 - 14 + 12 = -6$. Coinciden.

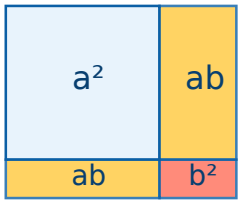
¡Atención!

- Escribir $(x+3)^2 = x^2 + 9$: falta el doble producto, $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.
- Olvidar cambiar los signos al restar un polinomio: $-(x-2) = -x + 2$, no $-x - 2$.
- Sumar monomios no semejantes: $3x + 2x^2$ no es $5x^3$.
- Multiplicar solo el primer término al usar la propiedad distributiva: $3(x+2) = 3x + 6$, no $3x + 2$.

Identidades notables y su significado geométrico

Propiedad: el cuadrado de una suma

El área de un cuadrado de lado $a+b$ se puede ver como la suma de cuatro partes: un cuadrado de área a^2, otro de área b^2 y dos rectángulos de área ab. Por eso $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. El error de poner solo $a^2 + b^2$ es olvidar los dos rectángulos.



Ejemplo 10

Calcula $(2x+7)^2$ y $(3y-5)(3y+5)$.

$(2x+7)^2 = 4x^2 + 2\cdot 2x\cdot 7 + 49 = 4x^2 + 28x + 49$. $(3y-5)(3y+5) = 9y^2 - 25$.

¿Sabías que...?

La palabra «álgebra» procede del título de un libro del matemático al-Juarismi, escrito en Bagdad en el siglo IX, y su propio nombre ha dado lugar a la palabra «algoritmo». Durante siglos las ecuaciones se escribían con palabras; las letras para las incógnitas se generalizaron en el siglo XVII, cuando Descartes propuso usar x, y, z para los datos desconocidos y las primeras letras del alfabeto para los conocidos.

Factor común y factorización

Método: factorizar una expresión

1. Busca un factor común a todos los términos (número y letra con menor exponente) y sácalo fuera del paréntesis.
2. Si no hay factor común, comprueba si es una identidad notable: dos términos que son cuadrados con signo menos (diferencia de cuadrados) o tres términos con dos cuadrados y el doble producto.
3. Comprueba multiplicando de nuevo.

Ejemplo 11

Factoriza $12x^3 - 18x^2 + 6x$ y $25x^2 - 36$.

En el primero, el mcd es 6 y la menor potencia de x es x: $6x(2x^2 - 3x + 1)$. El segundo es una diferencia de cuadrados: $25x^2 - 36 = (5x+6)(5x-6)$.

Expresiones algebraicas en situaciones reales

Regla: de la situación a la fórmula

Para escribir una fórmula a partir de un problema se elige una letra para la cantidad desconocida, se escribe en lenguaje algebraico cada dato (la mitad es $\frac{x}{2}$, el doble es $2x$, tres más es $x+3$) y se combinan según el enunciado. Una tarifa con cuota fija c y precio por unidad p tiene coste $c + p\cdot x$, donde x es el número de unidades.

Ejemplo 12

Una empresa de reparto cobra 4 € por el envío más 0,50 € por kilo. Escribe la fórmula y calcula el coste de un paquete de 6 kg.

Fórmula: $C = 4 + 0{,}5x$. Con $x = 6$: $C = 4 + 3 = 7$ €.

Valor numérico y comprobación de resultados

Definición: valor numérico

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números concretos y hacer las operaciones. Es una herramienta muy útil para comprobar resultados: si dos expresiones son equivalentes, deben dar el mismo valor numérico para cualquier valor de la letra. Basta que den valores distintos en un solo caso para saber que hay un error.

Método: sustituir sin equivocarse

1. Reescribe la expresión poniendo cada letra entre paréntesis.
2. Sustituye la letra por su valor dentro del paréntesis, sobre todo si es negativo o una fracción.
3. Calcula las potencias y después los productos y cocientes.
4. Termina con sumas y restas.
5. Si has desarrollado una expresión, sustituye el mismo valor en la expresión de partida y en la final: deben coincidir.

Ejemplo 13

Comprueba con $x = 3$ que $(x-2)^2 + 4x$ equivale a $x^2 + 4$.

En la expresión de partida: $(3-2)^2 + 4 \cdot 3 = 1 + 12 = 13$. En la final: $3^2 + 4 = 13$. Los valores coinciden. Desarrollando: $(x-2)^2 + 4x = x^2 - 4x + 4 + 4x = x^2 + 4$, lo que confirma la comprobación.

Álgebra y vida diaria

Las expresiones algebraicas están en las facturas de la luz (una parte fija más un precio por kilovatio), en las tarifas de móvil, en la ropa que se compra con descuento y en las fórmulas de la física. Cuando oyes «cuota fija más precio por unidad» estás ante una expresión de la forma $c + p \cdot x$. Entender cómo cambia el resultado al cambiar x te permite elegir la oferta que más te conviene.

Grado de un polinomio y errores al operar

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de sus monomios, una vez reducido. Conocerlo permite prever el resultado de una operación: al sumar dos polinomios el grado no aumenta, mientras que al multiplicarlos los grados se suman. Así, el producto de un polinomio de grado 2 por otro de grado 1 es siempre de grado 3, y esta previsión sirve para detectar errores.

Ejemplo 14

Calcula $(x-3)^2-(x+3)(x-3)$ y comprueba el resultado con $x=1$.

Desarrollamos cada parte con las identidades notables: $(x-3)^2=x^2-6x+9$ y $(x+3)(x-3)=x^2-9$. Restamos con cuidado, poniendo el segundo resultado entre paréntesis: $x^2-6x+9-(x^2-9)=x^2-6x+9-x^2+9=-6x+18$. Comprobación con $x=1$: la expresión inicial vale $(-2)^2-4\cdot(-2)=4+8=12$ y el resultado $-6+18=12$. Coinciden.

¡Atención! Los tres errores más frecuentes

Primero: escribir $(a+b)^2=a^2+b^2$, olvidando el doble producto $2ab$. Segundo: al restar un polinomio, cambiar solo el signo del primer término en lugar de cambiar todos. Tercero: sumar monomios que no son semejantes, como $3x^2+2x=5x^3$. Para evitarlos, sustituye un valor sencillo, como $x=1$ o $x=2$, en la expresión inicial y en el resultado: deben dar lo mismo.

Ejemplo 15

Factoriza $2x^3-8x$ por completo.

Primero sacamos el factor común, que es $2x$: $2x^3-8x=2x(x^2-4)$. Después reconocemos en el paréntesis una diferencia de cuadrados, $x^2-4=(x+2)(x-2)$. La factorización completa es $2x(x+2)(x-2)$. Comprobación con $x=3$: $2\cdot27-24=30$ y $6\cdot5\cdot1=30$. Conviene sacar siempre primero el factor común y después buscar identidades notables.

El consejo de Otto

Antes de multiplicar polinomios, ordénalos de mayor a menor grado y multiplica cada término del primero por todos los del segundo. Para comprobar, sustituye $x=1$ en el resultado y en las expresiones originales.