Soluciones - Expresiones algebraicas

Curso: 2 Eso

Solución del ejercicio 1

a. Escribimos primero cada parte de la frase y luego la juntamos. Triple: $3x$; más cinco: $3x + 5$.
b. Las dos letras se suman y después se toma la mitad, por eso hace falta paréntesis o fracción. Suma: $a + b$; la mitad: $\frac{a+b}{2}$.
c. El área de un rectángulo es largo por ancho, y el largo es el ancho más 4. Largo: $x + 4$. Área = largo por ancho: $x \cdot (x + 4) = x^2 + 4x$ m².
d. Dentro de 5 años las dos edades aumentan en 5. Marta dentro de 5 años: $x + 5$. Madre: $2x + 3$ (hoy) y $2x + 3 + 5 = 2x + 8$ (dentro de 5 años).

Comprueba cada expresión con un número: si $x = 2$, el triple más cinco es 11.

Solución del ejercicio 2

a. Sustituimos x por -2 entre paréntesis; el cuadrado de un negativo es positivo: $3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1 = 3 \cdot 4 + 4 + 1 = 12 + 4 + 1 = 17$.
b. Con $x = 0$ los dos primeros términos se anulan: $3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$.
c. Calculamos primero $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$: $3 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} - 1 + 1 = \frac{3}{4}$.
d. Con $x = 3$, $3^2 = 9$: $3 \cdot 9 - 6 + 1 = 27 - 6 + 1 = 22$.

El valor numérico de un polinomio cambia según el valor de la variable; en $x = 0$ coincide con el término independiente.

Solución del ejercicio 3

a. Coeficiente -5, parte literal x^3y, grado $3 + 1 = 4$.
b. Coeficiente $\frac{2}{3}$, parte literal xy^2, grado $1 + 2 = 3$.
c. Coeficiente 7, parte literal x^3y, grado 4.
d. Coeficiente -1, parte literal xy^2, grado 3.
e. Es un monomio de grado 0 (término independiente). Semejantes entre sí: $-5x^3y$ y $7x^3y$ (misma parte literal); $\frac{2}{3}xy^2$ y $-xy^2$.

Solución del ejercicio 4

a. Agrupamos por separado los términos en x^2 y en x, sumando sus coeficientes. x^2: $5+2=7$; x: $-3+1=-2$. Resultado: $7x^2-2x$.
b. Los tres monomios tienen la misma parte literal ab. $4-7+2=-1$. Resultado: $-ab$.
c. x^2y y xy^2 no son semejantes: se agrupan por separado. x^2y: $3+1=4$; xy^2: $-5+2=-3$. Resultado: $4x^2y-3xy^2$.
d. Reducimos los coeficientes fraccionarios a denominador 4. $\frac{2}{4}+\frac{3}{4}-\frac{4}{4}=\frac{1}{4}$. Resultado: $\frac{1}{4}x$.

Solo se pueden sumar monomios con la misma parte literal.

Solución del ejercicio 5

a. Multiplicamos los coeficientes y sumamos los exponentes de la misma base. $3\cdot(-4)=-12$ y $x^{2+3}=x^5$. Resultado: $-12x^5$.
b. Cada letra se trata por separado. $2\cdot 5=10$, $a^{1+3}=a^4$ y $b^{2+1}=b^3$. Resultado: $10a^4b^3$.
c. Al dividir, dividimos coeficientes y restamos exponentes. $12:(-3)=-4$ y $x^{4-2}=x^2$. Resultado: $-4x^2$.
d. La fracción es una división de monomios. $15:5=3$, $a^{5-2}=a^3$ y $b^{3-1}=b^2$. Resultado: $3a^3b^2$.

Comprobación del primero con $x=1$: $3\cdot(-4)=-12$.

Solución del ejercicio 6

a. Sumamos los términos semejantes uno a uno. $2x^2+x^2=3x^2$; $-3x+4x=x$; $5-1=4$. Resultado: $3x^2+x+4$.
b. Restar Q es sumar su opuesto: cambian los tres signos. Cambiamos el signo de Q: $2x^2-3x+5-x^2-4x+1=x^2-7x+6$.
c. Primero multiplicamos P por 2 y después sumamos Q. $2P=4x^2-6x+10$; sumando Q: $5x^2-2x+9$.
d. Calculamos el valor de las dos maneras para comprobar la resta. x^2-7x+6 en $x=2$: $4-14+6=-4$. Y $P(2)=8-6+5=7$, $Q(2)=4+8-1=11$, luego $7-11=-4$. Coincide.

Solución del ejercicio 7

a. Multiplicamos $3x$ por cada término del paréntesis. $3x\cdot 2x-3x\cdot 4=6x^2-12x$.
b. Cada término del primer factor multiplica a cada término del segundo y reducimos. $x^2-5x+2x-10=x^2-3x-10$.

c. Multiplicamos $2x$ y después -1 por los tres términos y agrupamos semejantes. $2x \cdot x^2 + 2x \cdot 3x + 2x \cdot (-2) - x^2 - 3x + 2 = 2x^3 + 6x^2 - 4x - x^2 - 3x + 2 = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$.
d. Desarrollamos los dos productos, con cuidado con el -2, y reducimos. $x^2 + 3x - 2x + 2 = x^2 + x + 2$.

Comprobación del segundo con $x = 1$: $3 \cdot (-4) = -12$ y $1 - 3 - 10 = -12$.

Solución del ejercicio 8

a. Cuadrado de una suma: cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo. $x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 25 = x^2 + 10x + 25$.
b. Cuadrado de una diferencia: el doble producto lleva signo menos. $(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 9 = 4x^2 - 12x + 9$.
c. Suma por diferencia: diferencia de los cuadrados, sin término en x. Suma por diferencia: $x^2 - 16$.
d. El primer término es $3a$, cuyo cuadrado es $9a^2$. $9a^2 + 12ab + 4b^2$ (el doble producto es $2 \cdot 3a \cdot 2b = 12ab$).
e. Es una suma por diferencia con $a = 5x$ y $b = 1$. $(5x)^2 - 1 = 25x^2 - 1$.

Recuerda que $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

Solución del ejercicio 9

a. Tres términos con dos cuadrados perfectos: buscamos un cuadrado de una diferencia. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, porque $2 \cdot x \cdot 3 = 6x$ y $3^2 = 9$.
b. Dos cuadrados restados: diferencia de cuadrados. $x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$ (diferencia de cuadrados).
c. $4x^2 = (2x)^2$ y $25 = 5^2$; comprobamos el doble producto. $4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$, porque $2 \cdot 2x \cdot 5 = 20x$.
d. $9y^2 = (3y)^2$ y $16 = 4^2$. $9y^2 - 16 = (3y + 4)(3y - 4)$.

Para comprobar una factorización basta con desarrollar el producto obtenido.

Solución del ejercicio 10

a. Buscamos el mcd de los coeficientes y la menor potencia de x. $\text{mcd}(6, 9) = 3$ y la menor potencia de x es x: $3x(2x + 3)$. Comprobación: $6x^2 + 9x$.
b. El mcd de 4 y 8 es 4 y la menor potencia de a es a^2. Factor común $4a^2$: $4a^2(a - 2)$.
c. Los tres términos contienen 5, x e y. Factor común $5xy$: $5xy(2x^2 - 3xy + 1)$.
d. Sacamos factor común 6. $12x + 18 = 6(2x + 3)$. Como $2x + 3$ es entero, el resultado es múltiplo de 6.

Solución del ejercicio 11

a. Parte fija más 25 € por cada mes: $C(x) = 30 + 25x$.
b. Sustituimos los tres valores de x: $x = 1$: $30 + 25 = 55$ €. $x = 6$: $30 + 150 = 180$ €. $x = 12$: $30 + 300 = 330$ €.
c. Igualamos la expresión a 255 y despejamos: $30 + 25x = 255$, luego $25x = 225$ y $x = 9$ meses.
d. Escribimos el segundo coste e igualamos las dos expresiones: Segundo gimnasio: $D(x) = 28x$. Igualamos: $30 + 25x = 28x$, luego $30 = 3x$ y $x = 10$ meses (ambos cuestan 280 €).

A partir de 10 meses resulta más barato el primer gimnasio.

Solución del ejercicio 12

a. El perímetro suma dos anchos y dos largos; el área es ancho por largo. Perímetro: $2x + 2(x + 3) = 4x + 6$ m. Área: $x(x + 3) = x^2 + 3x$ m².
b. Sustituimos $x = 5$ en las dos expresiones: $x = 5$: perímetro $4 \cdot 5 + 6 = 26$ m; área $25 + 15 = 40$ m².
c. Multiplicamos el perímetro por el precio del metro de valla: $26 \cdot 12 = 312$ €.
d. Multiplicamos el área por el precio del metro cuadrado: $40 \cdot 3{,}5 = 140$ €.

El jardín mide 5 m por 8 m y el coste total es $312 + 140 = 452$ €.

Solución del ejercicio 13

a. Cada grupo paga sus pizzas por p y sus bebidas por b. Primer grupo: $4p + 6b$. Segundo grupo: $3p + 5b$.
b. Sumamos los dos polinomios agrupando términos semejantes. $(4p + 6b) + (3p + 5b) = 7p + 11b$.
c. Sustituimos los precios en cada expresión: Primero: $4 \cdot 9 + 6 \cdot 2{,}5 = 36 + 15 = 51$ €. Segundo: $3 \cdot 9 + 5 \cdot 2{,}5 = 27 + 12{,}5 = 39{,}5$ €.
d. Cada pizza pasa a costar $p - 1$; hay 7 pizzas en total. Con descuento: $7(p - 1) + 11b = 7p + 11b - 7$. Con los precios: $63 + 27{,}5 - 7 = 83{,}5$ €. Sin descuento sería $51 + 39{,}5 = 90{,}5$ €.

El descuento total es de 7 €, uno por cada pizza.

Solución del ejercicio 14

a. Parte fija más 1,10 € por kilómetro: $T(x) = 2{,}5 + 1{,}1x$.
b. Sustituimos cada distancia en $T(x)$: $x = 2$: 4,70 €. $x = 5$: 8 €. $x = 10$: 13,50 €. $x = 15$: 19 €.
c. Igualamos el precio a 24,60 y despejamos x: $2{,}5 + 1{,}1x = 24{,}6$, luego $1{,}1x = 22{,}1$ y $x \approx 20{,}09$ km. Si se paga por km completo, son unos 20 km (y 24,50 €).

d. Igualamos las dos tarifas: $2{,}5 + 1{,}1x = 1{,}6x$, luego $2{,}5 = 0{,}5x$ y $x = 5$ km.

Para trayectos de más de 5 km resulta más barato el taxi.

Solución del ejercicio 15

a. Parcela: $2x(x+4) = 2x^2 + 8x$. Camino: $x \cdot x = x^2$.
b. Césped: $2x^2 + 8x - x^2 = x^2 + 8x$ m².
c. $100 + 80 = 180$ m².
d. Camino: $x^2 = 100$ m², coste $100 \cdot 18 = 1\,800$ €. Césped: $180 \cdot 2 = 360$ €. Total: $2\,160$ €.
e. Césped 180 m² frente a 100 m² de camino: sí es mayor. En general, $x^2 + 8x > x^2$ siempre que $x > 0$.

Solución del ejercicio 16

a. Un lado aumenta 3 m y el otro 2 m; multiplicamos los dos binomios. Dimensiones: $(x+3)$ y $(x+2)$. Área: $(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$.
b. Restamos el área del cuadrado original. Ganancia: $x^2 + 5x + 6 - x^2 = 5x + 6$ m².
c. Sustituimos $x = 6$ en la expresión de la ganancia: $x = 6$: $5 \cdot 6 + 6 = 36$ m².
d. Aplicamos el cuadrado de una suma y comparamos con $x = 6$: Cuadrado: $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Con $x = 6$: 81 m². El rectángulo tiene $36 + 36 = 72$ m² y el cuadrado ampliado 81 m².

Solución del ejercicio 17

a. A: $40 + 5x$. B: $10 + 8x$.
b. A: 65, 90 y 115 €. B: 50, 90 y 130 €.
c. $40 + 5x = 10 + 8x$, luego $30 = 3x$ y $x = 10$ invitados (90 € en ambos).
d. Con 12: A cuesta $40 + 60 = 100$ €; B cuesta $10 + 96 = 106$ €. Le conviene A y se ahorra 6 €.

Solución del ejercicio 18

a. El volumen del ortoedro es largo por ancho por profundidad. Volumen: $2x \cdot x \cdot 2 = 4x^2$ m³.
b. El área de la acera es el rectángulo exterior menos la piscina. Total: $(2x+2)(x+2) = 2x^2 + 4x + 2x + 4 = 2x^2 + 6x + 4$. Piscina: $2x \cdot x = 2x^2$. Acera: $6x + 4$ m².
c. Sustituimos $x = 10$: $x = 10$: volumen 400 m³; acera 64 m².
d. Multiplicamos el volumen por el precio del metro cúbico: $400 \cdot 1{,}2 = 480$ €.

Con $x = 10$ la piscina mide 20 m por 10 m.

Solución del ejercicio 19

a. Sumamos los cuatro números y reducimos la expresión general. Suma: $5 + 6 + 12 + 13 = 36$. En general: $n + (n + 1) + (n + 7) + (n + 8) = 4n + 16$. Para $n = 5$: $20 + 16 = 36$.
b. Multiplicamos los extremos de cada diagonal: $5 \cdot 13 = 65$ y $6 \cdot 12 = 72$. Diferencia: $65 - 72 = -7$.
c. Desarrollamos los dos productos y los restamos: $n(n + 8) = n^2 + 8n$ y $(n + 1)(n + 7) = n^2 + 8n + 7$. Resta: $n^2 + 8n - n^2 - 8n - 7 = -7$. Es independiente de n.
d. Planteamos $4n + 16 = 86$: $4n + 16 = 86$ da $4n = 70$ y $n = 17{,}5$, que no es entero. No es posible.

Solución del ejercicio 20

a. Seguimos las instrucciones paso a paso: Con 4: $4 \cdot 2 = 8$; $8 + 6 = 14$; $14 : 2 = 7$; $7 - 4 = 3$. Con -7: -14; -8; -4; $-4 - (-7) = 3$.
b. Llamamos x al número pensado y traducimos cada instrucción: $\dfrac{2x + 6}{2} - x = x + 3 - x = 3$. El resultado no depende de x.
c. Usamos la diferencia de cuadrados y el cuadrado de una diferencia: $51^2 - 49^2 = (51 + 49)(51 - 49) = 100 \cdot 2 = 200$.
$99^2 = (100 - 1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$.
d. $x^4 - 1$ es diferencia de cuadrados, y $x^2 - 1$ también: $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$.