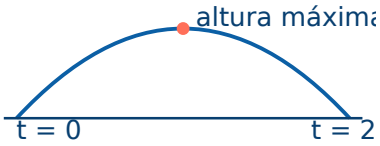
Apuntes - Ecuaciones de segundo grado

Curso: 2 Eso

Las ecuaciones de segundo grado aparecen cuando la incógnita está elevada al cuadrado. Tienen hasta dos soluciones y se resuelven con una fórmula.

Actividad de introducción: el salto del delfín

En el acuario de Valencia, un delfín salta fuera del agua. Su altura en metros, t segundos después de salir, es $h(t) = -5t^2 + 10t$. ¿Cuánto tiempo está fuera del agua? Basta resolver $-5t^2 + 10t = 0$, que da $t = 0$ y $t = 2$: el delfín vuelve al agua a los 2 segundos. Las trayectorias de los balones, los saltos o los chorros de una fuente son parábolas y se estudian con ecuaciones de segundo grado. Muchos problemas de áreas y de números también conducen a ecuaciones de este tipo. En este tema aprenderás a resolverlas con fórmulas y a interpretar las soluciones.



Qué es una ecuación de segundo grado

Definición: ecuación de segundo grado

Es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$. Los números a, b, c son los **coeficientes**. Se llama **completa** si $b \neq 0$ y $c \neq 0$, e **incompleta** en caso contrario.

Ecuaciones incompletas

Método: resolver ecuaciones incompletas

1. Si $b = 0$: $ax^2 + c = 0$, se despeja $x^2 = -\dfrac{c}{a}$ y $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ (si es positivo).
2. Si $c = 0$: $ax^2 + bx = 0$, se saca factor común $x(ax + b) = 0$, con soluciones $x = 0$ y $x = -\dfrac{b}{a}$.

Ejemplo 1

Resuelve $3x^2 - 27 = 0$ y $2x^2 - 8x = 0$.

$x^2 = 9$, $x = \pm 3$. Y $2x(x - 4) = 0$, $x = 0$ o $x = 4$.

La fórmula general

Teorema

Las soluciones de $ax^2+bx+c=0$ son $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. La expresión $\Delta=b^2-4ac$ es el **discriminante**: si $\Delta>0$ hay dos soluciones, si $\Delta=0$ hay una doble y si Δ no hay solución real.

Ejemplo 2

Resuelve $x^2-5x+6=0$.

$\Delta=25-24=1$. $x=\dfrac{5\pm1}{2}$: $x=3$ y $x=2$.

Ejemplo 3

Resuelve $2x^2+x+3=0$.

$\Delta=1-24=-23$. No tiene solución real.

Ecuaciones que hay que preparar

Método: ordenar la ecuación

1. Quita paréntesis y denominadores.
2. Pasa todo a un miembro: $ax^2+bx+c=0$.
3. Identifica a, b, c con su signo.

Ejemplo 4

Resuelve $(x+2)(x-3)=2x$.

$x^2-x-6=2x$, $x^2-3x-6=0$. $\Delta=9+24=33$. $x=\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{2}\approx 4{,}37$ y $-1{,}37$.

Relación entre coeficientes y soluciones

Propiedad

Si x_1 y x_2 son soluciones, su suma es $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ y su producto $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$. Sirve para comprobar el resultado o para escribir una ecuación a partir de sus soluciones.

Resumen del método y qué significan las soluciones

Observación

Gráficamente, las soluciones son los cortes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ con el eje X. Con Δ la parábola no corta al eje.

Problemas con ecuaciones de segundo grado

Ejemplo 5

El área de un rectángulo es 54 m² y la base mide 3 m más que la altura. Calcula las dimensiones.

$x(x+3) = 54$, $x^2 + 3x - 54 = 0$. $\Delta = 9 + 216 = 225$, $x = \dfrac{-3 \pm 15}{2}$: 6 o -9. Solo vale 6. Altura 6 m y base 9 m.

¡Atención!

Las ecuaciones incompletas no hay que resolverlas con la fórmula. Y, en problemas, descarta las soluciones negativas si la incógnita es una longitud o una edad.

La forma general y sus coeficientes

Definición: ecuación de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado** con una incógnita es una ecuación que se puede escribir en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$. Los números a, b y c son los coeficientes: a acompaña a x^2, b acompaña a x y c es el término independiente. Si $b = 0$ o $c = 0$, la ecuación es **incompleta**. Antes de aplicar cualquier fórmula hay que llevar todos los términos al primer miembro y reducir.

Ejemplo 6

Escribe $3x(x-2) = x^2 + 5$ en forma general e indica a, b y c.

Desarrollamos: $3x^2 - 6x = x^2 + 5$. Pasamos todo a la izquierda: $3x^2 - x^2 - 6x - 5 = 0$, es decir, $2x^2 - 6x - 5 = 0$. Los coeficientes son $a = 2$, $b = -6$ y $c = -5$.

De dónde sale la fórmula: completar el cuadrado

Método: completar el cuadrado

1. Divide la ecuación entre a para que el coeficiente de x^2 sea 1.

2. Pasa el término independiente al segundo miembro.
3. Suma a los dos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.
4. El primer miembro es ahora un cuadrado perfecto: $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$.
5. Extrae la raíz cuadrada (con $\pm$) y despeja x.

Ejemplo 7

Resuelve $x^2+6x-7=0$ completando el cuadrado.

Pasamos el -7: $x^2+6x=7$. La mitad de 6 es 3 y $3^2=9$: sumamos 9 a los dos miembros: $x^2+6x+9=16$. Entonces $(x+3)^2=16$ y $x+3=\pm 4$. Soluciones: $x=1$ y $x=-7$. Se obtiene el mismo resultado con la fórmula general.

Regla: fórmula general y discriminante

Las soluciones de $ax^2+bx+c=0$ son $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. La expresión $\Delta=b^2-4ac$ se llama **discriminante**. Si $\Delta>0$, hay dos soluciones reales distintas; si $\Delta=0$, hay una solución doble $x=\frac{-b}{2a}$; si Δ, no hay soluciones reales.

¡Atención!

- No llevar la ecuación a la forma general antes de identificar a, b y c.
- Olvidar el signo de b en $-b$: si $b=-5$, entonces $-b=5$.
- Dividir solo una parte de la expresión entre $2a$: toda la fracción lleva denominador $2a$.
- En $ax^2+c=0$ olvidar la solución negativa, o en $ax^2+bx=0$ dividir entre x y perder la solución $x=0$.
- No descartar soluciones sin sentido en un problema (longitudes o tiempos negativos).

Problemas y significado de las soluciones

Método: resolver un problema de segundo grado

1. Identifica la cantidad desconocida y llámala x.
2. Expresa las demás cantidades con x (por ejemplo, si el largo mide 3 m más, será $x+3$).
3. Escribe la igualdad que da el enunciado (un área, un producto, una altura).
4. Lleva la ecuación a la forma general y resuélvela.
5. Analiza cada solución en el contexto: si es una longitud, una edad o un tiempo, debe ser positiva.

6. Escribe la respuesta con unidades y comprueba que cumple el enunciado.

Ejemplo 8

Dos números positivos se diferencian en 4 y su producto es 96. ¿Cuáles son?

Sean x y $x+4$. Ecuación: $x(x+4)=96$, es decir, $x^2+4x-96=0$.
$\Delta = 16+384=400$. $x=\dfrac{-4\pm 20}{2}$: $x=8$ y $x=-12$. Como los números son positivos, $x=8$ y los números son 8 y 12. Comprobación: $12-8=4$ y $8\cdot 12=96$.

¿Sabías que...?

Los babilonios, hace casi 4 000 años, ya resolvían problemas que equivalen a ecuaciones de segundo grado, como hallar los lados de un rectángulo conocidos su área y su perímetro, aunque no tenían nuestra notación. La fórmula general tal como la usamos se fue perfeccionando durante siglos: los matemáticos de la India y del mundo árabe dieron reglas generales, y en el siglo XVI se aceptaron por fin las soluciones negativas.

Ecuaciones que hay que preparar

Propiedad: suma y producto de las soluciones

Si x_1 y x_2 son las soluciones de $x^2+bx+c=0$, entonces $x_1+x_2=-b$ y $x_1\cdot x_2=c$. Esta relación permite comprobar las soluciones sin sustituir y construir una ecuación a partir de sus soluciones: la ecuación con soluciones x_1 y x_2 es $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$. Por ejemplo, con soluciones 4 y -1 se obtiene $x^2-3x-4=0$.

Ejemplo 9

Resuelve $(x+2)(x-4)=2x+7$ y comprueba con la suma de las soluciones.

Desarrollamos: $x^2-2x-8=2x+7$. Pasamos todo a la izquierda: $x^2-4x-15=0$. $\Delta=16+60=76$, que no es un cuadrado perfecto, así que las soluciones son $x=\dfrac{4\pm\sqrt{76}}{2}=2\pm\sqrt{19}$, aproximadamente $6{,}36$ y $-2{,}36$. Comprobación: la suma es 4, que coincide con $-b=4$, y el producto es -15, igual que c.

Relación con las parábolas

Resolver $ax^2+bx+c=0$ equivale a buscar los puntos donde la parábola $y=ax^2+bx+c$ corta al eje horizontal. Dos soluciones significan dos cortes, una solución doble significa que la parábola toca el eje en un solo punto y ninguna

solución real significa que no lo corta. Esta imagen ayuda a comprobar si el resultado tiene sentido.

Consejo para elegir el método

Antes de usar la fórmula general, mira si la ecuación es incompleta: casi siempre se resuelve más rápido con un despeje o sacando factor común. Si es completa y los números son pequeños, intenta encontrar dos números que sumen $-b$ y multipliquen c cuando $a = 1$. Si no los ves enseguida, la fórmula general nunca falla. Después de resolver, sustituye al menos una solución en la ecuación inicial para evitar errores de signo, que son los más comunes en este tema.

Resolver por factorización

Además de la fórmula general, hay un camino muy rápido cuando el polinomio de segundo grado se puede escribir como producto de dos factores de primer grado. Se basa en una propiedad muy sencilla de los números: si un producto vale cero, al menos uno de sus factores vale cero.

Propiedad: producto igual a cero

Si $A \cdot B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$. Por tanto, si una ecuación se escribe como $(x - p)(x - q) = 0$, sus soluciones son $x = p$ y $x = q$. Al revés, si conocemos las soluciones p y q, la ecuación $x^2 - (p + q)x + p \cdot q = 0$ las tiene como soluciones.

Ejemplo 10

Resuelve $x^2 - 7x + 12 = 0$ buscando dos números cuya suma sea 7 y cuyo producto sea 12.

Probamos parejas de divisores de 12: 1 y 12 suman 13; 2 y 6 suman 8; 3 y 4 suman 7. Entonces $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$, y la ecuación $(x - 3)(x - 4) = 0$ tiene las soluciones $x = 3$ y $x = 4$. Comprobamos con la fórmula: $\Delta = 49 - 48 = 1$ y $x = \dfrac{7 \pm 1}{2}$, que da 4 y 3.

¡Atención! No dividas entre x

En $2x^2 = 5x$ es tentador dividir los dos miembros entre x y obtener $x = \dfrac{5}{2}$. Así se pierde la solución $x = 0$. Lo correcto es pasar todo a un miembro, $2x^2 - 5x = 0$, y sacar factor común: $x(2x - 5) = 0$.

¿Sabías que...? Al-Juarismi y las ecuaciones de segundo grado

Hacia el año 820, el matemático Al-Juarismi explicó en Bagdad cómo resolver

ecuaciones de segundo grado completando cuadrados, dibujando literalmente cuadrados y rectángulos. No usaba letras ni números negativos, así que distinguía seis tipos distintos de ecuaciones. Hoy la fórmula general las resuelve todas a la vez.

El consejo de Otto

Antes de usar la fórmula, escribe a, b y c con sus signos. Si falla algo, calcula el discriminante por separado: un error de signo en $b^2 - 4ac$ es el más típico.