Soluciones - Ecuaciones de segundo grado

Curso: 2 Eso

Solución del ejercicio 1

a. $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$. Es completa.
b. $a = 1$, $b = 0$, $c = -9$. Incompleta (falta el término en x).
c. $a = 2$, $b = 6$, $c = 0$. Incompleta (falta el término independiente).
d. Pasamos todo al primer miembro: $5x^2 - 20 = 0$. Entonces $a = 5$, $b = 0$, $c = -20$. Incompleta.
e. Pasamos todo al primer miembro: $x^2 + 4x + 2x - 7 = 0$, es decir, $x^2 + 6x - 7 = 0$. Entonces $a = 1$, $b = 6$, $c = -7$. Completa.

Solución del ejercicio 2

a. Pasamos el número al otro miembro y hacemos la raíz cuadrada con doble signo. $x^2 = 49$, luego $x = \pm 7$.
b. Dividimos entre 3 antes de hacer la raíz. $3x^2 = 27$, $x^2 = 9$ y $x = \pm 3$.
c. Despejamos x^2 y observamos su signo. $2x^2 = -8$, $x^2 = -4$: un cuadrado nunca es negativo, no tiene solución real.
d. Dividimos entre 5 y hacemos la raíz. $x^2 = \frac{45}{5} = 9$ y $x = \pm 3$.

Estas ecuaciones incompletas (sin término en x) no necesitan la fórmula general.

Solución del ejercicio 3

a. Sacamos factor común x e igualamos cada factor a cero. $x(x - 6) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = 6$.
b. El factor común es $3x$. $3x(x + 4) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = -4$.
c. Primero pasamos todo al primer miembro, sin dividir entre x. $2x^2 - 5x = 0$, $x(2x - 5) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = \frac{5}{2}$.
d. Sacamos factor común x. $x(x + 1) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = -1$.

En las incompletas sin término independiente, una de las soluciones es siempre $x = 0$.

Solución del ejercicio 4

a. Identificamos $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$ y calculamos el discriminante. $\Delta = 25 - 24 = 1$

. $x = \frac{5 \pm 1}{2}$, es decir, $x = 3$ y $x = 2$. Comprobación: $9 - 15 + 6 = 0$.

b. $a = 2$, $b = 3$, $c = -2$; el denominador es $2a = 4$. $\Delta = 9 + 16 = 25$. $x = \frac{-3 \pm 5}{4}$, es decir, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$. Comprobación: $2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2 = 0$.

c. $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$; el discriminante es nulo. $\Delta = 16 - 16 = 0$. $x = \frac{-4}{2} = -2$ (solución doble).

d. $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$; el discriminante es negativo. $\Delta = 1 - 4 = -3$. No tiene soluciones reales.

El signo del discriminante decide el número de soluciones antes de terminar el cálculo.

Solución del ejercicio 5

a. Con $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$: $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$: dos soluciones.
b. Con $a = 3$, $b = -2$, $c = 5$: $\Delta = 4 - 60 = -56$: ninguna solución real.
c. Con $a = 1$, $b = -4$, $c = 4$: $\Delta = 16 - 16 = 0$: una solución doble ($x = 2$).
d. Para que haya solución doble el discriminante debe ser cero. Hace falta $\Delta = 36 - 4k = 0$, luego $k = 9$. La ecuación es $(x + 3)^2 = 0$ con solución doble $x = -3$.

Regla: $\Delta > 0$, dos soluciones; $\Delta = 0$, una doble; Δ, ninguna real.

Solución del ejercicio 6

a. Quitamos el paréntesis y pasamos el 10 restando. $x^2 + 3x - 10 = 0$. $\Delta = 9 + 40 = 49$. $x = \frac{-3 \pm 7}{2}$: $x = 2$ y $x = -5$.

b. Aquí es más rápido hacer la raíz de los dos miembros. $x - 2 = \pm 3$. Entonces $x = 5$ y $x = -1$.

c. Multiplicamos los paréntesis y pasamos el 12. $x^2 - 2x - 3 = 12$, es decir, $x^2 - 2x - 15 = 0$. $\Delta = 4 + 60 = 64$. $x = \frac{2 \pm 8}{2}$: $x = 5$ y $x = -3$.

d. Pasamos todos los términos al primer miembro y reducimos. $x^2 - 6x - 7 = 0$. $\Delta = 36 + 28 = 64$. $x = \frac{6 \pm 8}{2}$: $x = 7$ y $x = -1$.

Antes de aplicar la fórmula, la ecuación debe quedar igualada a cero.

Solución del ejercicio 7

a. El mcm de los denominadores es 2. Multiplicamos por 2: $x^2 - x = 6$, es decir,

$x^2 - x - 6 = 0$. $\Delta = 1 + 24 = 25$. $x = \dfrac{1 \pm 5}{2}$: $x = 3$ y $x = -2$.

b. El mcm es 3; el término x también se multiplica por 3. Multiplicamos por 3: $x^2 = x + 6 + 3x$, es decir, $x^2 - 4x - 6 = 0$. $\Delta = 16 + 24 = 40$.
$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{40}}{2} = 2 \pm \sqrt{10}$, aproximadamente $5{,}16$ y $-1{,}16$.

Cuando el discriminante no es un cuadrado perfecto, las soluciones son irracionales y se dan con raíces o aproximadas.

Solución del ejercicio 8

a. Suma: 7; producto: 12. Los números que suman 7 y multiplican 12 son 3 y 4.
b. Suma $= 2 + (-5) = -3$ y producto $= 2 \cdot (-5) = -10$. La ecuación es $x^2 + 3x - 10 = 0$.
c. Suma 8 y producto 16: $x^2 - 8x + 16 = 0$, es decir, $(x - 4)^2 = 0$.
d. Son las soluciones de $x^2 - 10x + 24 = 0$, $\Delta = 100 - 96 = 4$, $x = \dfrac{10 \pm 2}{2}$: 6 y 4.
Con producto 30: $\Delta = 100 - 120$, no hay números reales así.

Solución del ejercicio 9

a. El largo es el ancho más 3 y el área es ancho por largo. Largo: $x + 3$. Área: $x(x + 3) = 40$, es decir, $x^2 + 3x - 40 = 0$.
b. Aplicamos la fórmula general y analizamos el signo de cada solución.
$\Delta = 9 + 160 = 169$. $x = \dfrac{-3 \pm 13}{2}$: $x = 5$ y $x = -8$. No vale -8 porque una longitud no puede ser negativa.
c. Con el ancho calculamos el largo y el perímetro. Ancho 5 m y largo 8 m. Perímetro: $2(5 + 8) = 26$ m.
d. Multiplicamos el área por el precio del metro cuadrado. $40 \cdot 3{,}5 = 140$ €.

Comprobación: $5 \cdot 8 = 40$ m².

Solución del ejercicio 10

a. Un lado mide $x + 3$ y el otro $x - 2$. Dimensiones: $(x + 3)$ y $(x - 2)$. Ecuación: $(x + 3)(x - 2) = 14$.
b. Desarrollamos, igualamos a cero y aplicamos la fórmula; una longitud no puede ser negativa. $x^2 + x - 6 = 14$, $x^2 + x - 20 = 0$, $\Delta = 81$, $x = \dfrac{-1 \pm 9}{2}$: $x = 4$ y $x = -5$. Solo vale $x = 4$ cm.
c. El cuadrado tenía lado 4 cm. $4^2 = 16$ cm².
d. Restamos las dos áreas. $16 - 14 = 2$ cm².

Comprobación: $7 \cdot 2 = 14$ cm².

Solución del ejercicio 11

a. Dos enteros consecutivos se escriben x y $x+1$. $x(x+1) = 156$, es decir, $x^2 + x - 156 = 0$.
b. Aplicamos la fórmula; aquí las dos soluciones son válidas porque son números enteros. $\Delta = 1 + 624 = 625$ y $x = \dfrac{-1 \pm 25}{2}$: $x = 12$ y $x = -13$. Parejas: 12 y 13; -13 y -12.
c. Sumamos cada pareja. $12 + 13 = 25$ y $-13 + (-12) = -25$.
d. Razonamos con la paridad: De dos enteros consecutivos uno es par, así que el producto contiene un factor 2.

Solución del ejercicio 12

a. El balón toca el suelo cuando la altura es cero. $-5t^2 + 10t + 15 = 0$, dividiendo entre -5: $t^2 - 2t - 3 = 0$. $\Delta = 4 + 12 = 16$, $t = \dfrac{2 \pm 4}{2}$: $t = 3$ y $t = -1$. Solo vale $t = 3$ s.
b. Sustituimos $t = 2$ y $t = 3$ en la fórmula. $h(2) = -20 + 20 + 15 = 15$ m. $h(3) = -45 + 30 + 15 = 0$ m.
c. Sustituimos $t = 1$. $h(1) = -5 + 10 + 15 = 20$ m.
d. Igualamos la altura a 15 y simplificamos. $-5t^2 + 10t = 0$, $-5t(t-2) = 0$: $t = 0$ s y $t = 2$ s.

Un tiempo negativo no tiene sentido porque el balón se lanza en $t = 0$.

Solución del ejercicio 13

a. El marco añade x cm por cada lado, es decir, $2x$ en cada dimensión. Dimensiones: $(20 + 2x)$ por $(30 + 2x)$.
b. Igualamos el área total a 936, simplificamos entre 4 y aplicamos la fórmula. $(20 + 2x)(30 + 2x) = 936$, es decir, $600 + 100x + 4x^2 = 936$, $4x^2 + 100x - 336 = 0$, $x^2 + 25x - 84 = 0$. $\Delta = 625 + 336 = 961 = 31^2$. $x = \dfrac{-25 \pm 31}{2}$: $x = 3$ y $x = -28$.
c. Descartamos la anchura negativa; el marco es el área total menos la foto. Marco de 3 cm. Superficie del marco: $936 - 600 = 336$ cm².
d. Multiplicamos la superficie del marco por el precio. $336 \cdot 0{,}04 = 13{,}44$ €.

Comprobación: $26 \cdot 36 = 936$ cm².

Solución del ejercicio 14

a. Ingresos $= x(200 - 5x)$.
b. $x(200 - 5x) = 1\,500$, $200x - 5x^2 = 1\,500$, $x^2 - 40x + 300 = 0$.
$\Delta = 1\,600 - 1\,200 = 400$. $x = \dfrac{40 \pm 20}{2}$: $x = 30$ y $x = 10$.
c. Con 10 €: $200 - 50 = 150$ entradas. Con 30 €: $200 - 150 = 50$ entradas. En ambos casos $10 \cdot 150 = 30 \cdot 50 = 1\,500$ €.
d. El de 10 €, porque asisten 150 personas en lugar de 50 y se logra la misma recaudación.

Solución del ejercicio 15

a. Dimensiones: $(12 + 2x)$ por $(8 + 2x)$.
b. Área total $= 96 + 96 = 192$. $(12 + 2x)(8 + 2x) = 192$, es decir,
$96 + 40x + 4x^2 = 192$, $x^2 + 10x - 24 = 0$. $\Delta = 100 + 96 = 196$. $x = \dfrac{-10 \pm 14}{2}$:
$x = 2$ y $x = -12$.
c. El camino mide 2 m de ancho (la solución negativa no vale). Conjunto: 16 m por 12 m, 192 m².
d. $96 \cdot 22 = 2\,112$ €.
e. Cada baldosa tiene $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$ m². Hacen falta $96 : 0{,}16 = 600$ baldosas.

Solución del ejercicio 16

a. Tiempo real: $\dfrac{60}{v}$ h. Tiempo más rápido: $\dfrac{60}{v+5}$ h.
b. $\dfrac{60}{v} - \dfrac{60}{v+5} = 1$. Multiplicamos por $v(v+5)$: $60(v+5) - 60v = v(v+5)$, es decir,
$300 = v^2 + 5v$ y $v^2 + 5v - 300 = 0$.
c. $\Delta = 25 + 1\,200 = 1\,225 = 35^2$. $v = \dfrac{-5 \pm 35}{2}$: $v = 15$ y $v = -20$. Vale $v = 15$ km/h.
d. Real: $60 : 15 = 4$ h. Más rápido: $60 : 20 = 3$ h. La diferencia es de 1 hora.

Solución del ejercicio 17

a. $x(x + 5) = 126$, es decir, $x^2 + 5x - 126 = 0$.
b. $\Delta = 25 + 504 = 529 = 23^2$. $x = \dfrac{-5 \pm 23}{2}$: $x = 9$ y $x = -14$. Laura tiene 9 años y Pedro 14.
c. Dentro de 4 años: $13 \cdot 18 = 234$.
d. Hace t años: $(9 - t)(14 - t) = 36$, es decir, $t^2 - 23t + 126 = 36$, $t^2 - 23t + 90 = 0$,

$\Delta = 529 - 360 = 169$, $t = \dfrac{23 \pm 13}{2}$: $t = 5$ o $t = 18$. Solo vale $t = 5$: tenían 4 y 9 años ($4 \cdot 9 = 36$).

Solución del ejercicio 18

a. El perímetro es el doble de la suma de largo y ancho. Semiperímetro: $30 : 2 = 15$ m.
b. Expresamos el largo en función del ancho y usamos el área. Largo: $15 - x$. Área: $x(15 - x) = 54$, es decir, $x^2 - 15x + 54 = 0$.
c. Aplicamos la fórmula general. $\Delta = 225 - 216 = 9$. $x = \dfrac{15 \pm 3}{2}$: $x = 9$ y $x = 6$. Es un rectángulo de 6 m por 9 m (las dos soluciones dan el mismo rectángulo).
d. Multiplicamos la superficie por el precio del plástico. $54 \cdot 1{,}8 = 97{,}20$ €.

Solución del ejercicio 19

a. $-x^2 + 6x = 0$, $x(-x + 6) = 0$: $x = 0$ y $x = 6$. La luz es de 6 m.
b. $-x^2 + 6x = 5$, $x^2 - 6x + 5 = 0$, $\Delta = 16$, $x = \dfrac{6 \pm 4}{2}$: $x = 1$ y $x = 5$.
c. $h(3) = -9 + 18 = 9$ m.
d. En el centro hay 9 m: pasa. A 1 m de la orilla hay $h(1) = 5$ m: pasa, porque $4{,}5$.

Solución del ejercicio 20

a. Sustituimos $x^2 = z$ y $x^4 = z^2$. $z^2 - 5z + 4 = 0$. $\Delta = 25 - 16 = 9$ y $z = \dfrac{5 \pm 3}{2}$: $z = 4$ y $z = 1$.
b. Cada valor positivo de z da dos valores de x. $x^2 = 4$ da $x = \pm 2$. $x^2 = 1$ da $x = \pm 1$. Cuatro soluciones: $-2, -1, 1, 2$.
c. Sustituimos en la ecuación inicial: Con $x = 2$: $16 - 20 + 4 = 0$.
d. Repetimos el cambio de variable. $z^2 - 13z + 36 = 0$, $\Delta = 169 - 144 = 25$, $z = \dfrac{13 \pm 5}{2}$: $z = 9$ y $z = 4$. Entonces $x = \pm 3$ y $x = \pm 2$.

Estas ecuaciones se llaman bicuadradas y pueden tener hasta cuatro soluciones.