Apuntes - Ecuaciones de primer grado

Curso: 2 Eso

Las ecuaciones de primer grado son la herramienta principal del álgebra en 2.º de ESO. Aquí aprendes a resolverlas con rigor y a usarlas en problemas.

Actividad de introducción: la balanza de Nuria

En el laboratorio del instituto, Nuria equilibra una balanza de dos platos. En el plato izquierdo hay una bolsa que pesa x gramos y tres pesas de 50 g; en el plato derecho, una pesa de 500 g. Como la balanza está en equilibrio, sabemos que $x + 150 = 500$. Para averiguar cuánto pesa la bolsa, Nuria quita 150 g de cada plato: la balanza sigue equilibrada y queda $x = 350$. Eso es resolver una ecuación: hacer en los dos platos la misma operación para dejar la incógnita sola. En este tema aprenderás a hacerlo con ecuaciones cada vez más complejas, con paréntesis, denominadores y decimales, y a usarlas para resolver problemas de la vida diaria.



Qué es una ecuación

Definición: ecuación de primer grado

Una **ecuación de primer grado** con una incógnita se puede escribir como $ax + b = 0$ con $a \neq 0$. La **solución** es el valor de x que cumple la igualdad: $x = -\dfrac{b}{a}$.

Ecuaciones equivalentes y reglas de transposición

Regla: transposición

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución. Se obtienen sumando o restando lo mismo a los dos miembros, o multiplicando o dividiendo ambos por un número distinto de 0. De aquí la transposición: lo que suma pasa restando y lo que multiplica pasa dividiendo.

Cómo resolver paso a paso

Método: resolver una ecuación

1. Quita paréntesis.

2. Quita denominadores multiplicando todos los términos por el mcm.
3. Agrupa los términos con x en un miembro y los números en el otro.
4. Reduce y despeja.
5. Comprueba.

Ejemplo 1

Resuelve $\frac{2x-1}{3} - \frac{x+2}{4} = 1$**.**

mcm $= 12$: $4(2x-1) - 3(x+2) = 12$. $8x - 4 - 3x - 6 = 12$, $5x = 22$, $x = \frac{22}{5}$.

Ejemplo 2

Resuelve $5(x-1) - 2(x+3) = 4x - 9$**.**

$5x - 5 - 2x - 6 = 4x - 9$, $3x - 11 = 4x - 9$, $-x = 2$, $x = -2$.

Ecuaciones sin solución e identidades

Propiedad

Si al reducir queda $0 = k$ con $k \neq 0$, la ecuación **no tiene solución** ($2x + 1 = 2x + 5$).
Si queda $0 = 0$, es una **identidad** y tiene infinitas soluciones ($2(x+1) = 2x + 2$).

Ecuaciones con decimales

Observación

Para evitar decimales multiplica toda la ecuación por 10, 100... Por ejemplo, $0{,}3x + 1{,}2 = 0{,}9$ pasa a $3x + 12 = 9$, luego $x = -1$.

Resolución de problemas con ecuaciones

Método: plantear un problema

1. Define la incógnita.
2. Expresa las demás cantidades con ella.
3. Escribe la ecuación con la relación del enunciado.
4. Resuelve y comprueba en el texto.

Ejemplo 3

Un padre tiene 40 años y su hijo 10. ¿Dentro de cuántos años la edad del

padre será el triple?

$40 + x = 3(10 + x)$, $40 + x = 30 + 3x$, $x = 5$. Dentro de 5 años (45 y 15).

Ejemplo 4

Dos ciclistas se cruzan en una carretera de 120 km. Uno va a 25 km/h y el otro a 35 km/h, partiendo a la vez uno hacia el otro. ¿Cuándo se encuentran?

$25t + 35t = 120$, $t = 2$ h.

Ejemplo 5

Un grifo llena un depósito en 6 h y otro en 3 h. ¿Cuánto tardan juntos?

En 1 h llenan $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Juntos, 2 h.

¡Atención!

Al multiplicar por el mcm, multiplica todos los términos, incluidos los enteros. Y si el signo menos precede un paréntesis, cambia todos los signos de dentro.

Qué significa resolver una ecuación

Definición: solución y ecuaciones equivalentes

Una **solución** de una ecuación es el valor de la incógnita que convierte la igualdad en una igualdad verdadera. Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Se obtiene una ecuación equivalente sumando o restando el mismo número (o la misma expresión) a los dos miembros, o multiplicando o dividiendo los dos miembros por el mismo número distinto de cero.

Ejemplo 6

Resuelve $4x + 7 = 2x + 19$ indicando las operaciones.

Restamos $2x$ a los dos miembros: $2x + 7 = 19$. Restamos 7: $2x = 12$. Dividimos entre 2: $x = 6$. Comprobación: $4 \cdot 6 + 7 = 31$ y $2 \cdot 6 + 19 = 31$.

Ecuaciones con paréntesis y denominadores

Método: resolver una ecuación completa

1. Quita los paréntesis aplicando la propiedad distributiva, cuidando los signos (un signo menos delante cambia todos los signos del interior).
2. Quita los denominadores multiplicando los dos miembros por el mcm.

3. Pasa los términos con x a un miembro y los números al otro.
4. Reduce los términos semejantes.
5. Despeja la incógnita dividiendo entre su coeficiente.
6. Comprueba sustituyendo el valor en la ecuación inicial.

Ejemplo 7

Resuelve $\frac{2x-1}{3} - \frac{x+2}{2} = 1$**.**

mcm$(3,2) = 6$. Multiplicamos todo por 6: $2(2x-1) - 3(x+2) = 6$. Quitamos paréntesis: $4x - 2 - 3x - 6 = 6$. Reducimos: $x - 8 = 6$. Entonces $x = 14$.
Comprobación: $\frac{27}{3} - \frac{16}{2} = 9 - 8 = 1$.

¡Atención!

- Cambiar de miembro un término sin cambiarle el signo: «$x + 3 = 7$ luego $x = 7 + 3$» es incorrecto.
- Olvidar multiplicar por el mcm todos los términos, incluidos los que no tienen denominador.
- Al quitar un paréntesis precedido de signo menos, cambiar solo el primer signo: $-(x-4) = -x + 4$.
- No comprobar la solución: sustituir en la ecuación inicial detecta casi todos los fallos.

Ecuaciones sin solución e identidades

Propiedad: tres posibilidades

Al reducir una ecuación de primer grado pueden salir tres situaciones. Si queda $ax = b$ con $a \neq 0$, hay una única solución $x = \frac{b}{a}$. Si queda una igualdad falsa como $0 = 5$, la ecuación no tiene solución. Si queda una igualdad siempre verdadera como $0 = 0$, es una identidad y cualquier número es solución.

Problemas con ecuaciones

Método: plantear un problema

1. Lee el problema dos veces y decide qué cantidad desconocida vas a llamar x.
2. Expresa las demás cantidades en función de x.
3. Busca la igualdad que relaciona los datos (una suma total, un perímetro, dos cantidades iguales).
4. Escribe y resuelve la ecuación.

5. Interpreta el resultado, escribe las unidades y comprueba que cumple el enunciado.

Ejemplo 8

Un padre tiene 38 años y su hija 10. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el triple de la de la hija?

Dentro de x años, el padre tendrá $38 + x$ y la hija $10 + x$. Ecuación: $38 + x = 3(10 + x)$, es decir, $38 + x = 30 + 3x$. Entonces $8 = 2x$ y $x = 4$ años. Comprobación: el padre tendrá 42 y la hija 14, y $3 \cdot 14 = 42$.

Ejemplo 9

Un rectángulo tiene un perímetro de 50 cm y la base mide 5 cm más que la altura. ¿Cuánto miden sus lados?

Sea x la altura; la base es $x + 5$. Perímetro: $2x + 2(x + 5) = 50$, es decir, $4x + 10 = 50$. Entonces $x = 10$ cm de altura y 15 cm de base. Comprobación: $2 \cdot 10 + 2 \cdot 15 = 50$.

¿Sabías que...?

El signo igual lo introdujo el matemático galés Robert Recorde en 1557, porque, según escribió, «no puede haber dos cosas más iguales que dos rectas paralelas». Antes se escribía la palabra «aequalis» o la abreviatura «ae». La idea de resolver ecuaciones con la balanza es muy antigua: los matemáticos de Mesopotamia y de Egipto ya resolvían problemas que hoy planteamos con ecuaciones de primer grado.

Ecuaciones con decimales

Regla: eliminar los decimales

Para trabajar con números enteros se multiplican los dos miembros por una potencia de 10 que elimine todas las comas: por 10 si el mayor número de decimales es uno, por 100 si es dos, y así sucesivamente. Hay que multiplicar todos los términos, también los que no tienen decimales. Después se resuelve como una ecuación normal.

Ejemplo 10

Resuelve $0{,}3x + 1{,}5 = 0{,}8x - 2$**.**

Multiplicamos por 10: $3x + 15 = 8x - 20$. Pasamos las x a la derecha y los números a la izquierda: $15 + 20 = 8x - 3x$, es decir, $35 = 5x$. Entonces $x = 7$. Comprobación: $0{,}3 \cdot 7 + 1{,}5 = 3{,}6$ y $0{,}8 \cdot 7 - 2 = 3{,}6$.

Estrategia para resolver problemas

Si un problema te bloquea, dibuja un esquema, haz una tabla con los datos o prueba con un número cualquiera para entender cómo se relacionan las cantidades. Después sustituye ese número por la letra x: el cálculo que hiciste con el ejemplo es justo el que debes escribir en la ecuación.

Problemas de móviles y de mezclas

Dos tipos de problemas aparecen con mucha frecuencia en 2.º de ESO: los de móviles, en los que dos personas o vehículos se encuentran o se alcanzan, y los de mezclas, en los que se combinan productos de distinto precio. En ambos casos conviene organizar los datos en una tabla antes de escribir la ecuación.

Método: problemas de móviles

1. Recuerda que distancia = velocidad · tiempo.
2. Si los móviles van uno hacia el otro, la suma de las distancias recorridas es la distancia que los separaba.
3. Si uno persigue al otro, en el momento del alcance los dos han recorrido la misma distancia desde el punto de salida.
4. Escribe la ecuación, resuélvela y comprueba con los dos móviles.

Ejemplo 11

Se mezclan 30 kg de café de 8 €/kg con cierta cantidad de café de 12 €/kg y se obtiene una mezcla de 9,60 €/kg. ¿Cuántos kilos del segundo café se usan?

Llamamos x a los kilos de café de 12 €/kg. El valor del primero es $30 \cdot 8 = 240$ €, el del segundo $12x$ € y el de la mezcla $9{,}6(30 + x)$ €. Como el valor no cambia al mezclar: $240 + 12x = 288 + 9{,}6x$. Agrupamos: $2{,}4x = 48$ y $x = 20$ kg. Comprobación: $240 + 240 = 480$ € y $50 \cdot 9{,}6 = 480$ €.

¡Atención! Unidades coherentes

Si la velocidad está en km/h, el tiempo debe estar en horas: 30 minutos son 0,5 h, no 30. Un error de unidades da un resultado absurdo aunque la ecuación esté bien resuelta.

El consejo de Otto

Sustituye siempre tu solución en la ecuación original. Y en los problemas, escribe el significado de x en una línea antes de empezar: evita responder con el número equivocado.