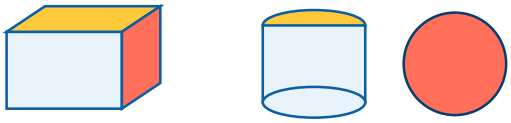
Apuntes - Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Curso: 2 Eso

Los cuerpos geométricos ocupan espacio. Aprenderás a calcular su superficie y su volumen y a resolver problemas con ellos.

Actividad de introducción: llenar y pintar

Para hacer una fiesta en el jardín, Pablo quiere llenar una piscina hinchable y pintar una caseta de madera. Para la piscina necesita saber cuánta agua cabe: es un problema de volumen. Para la caseta tiene que saber cuánta superficie debe pintar: es un problema de área. Aunque parecen parecidos, el área se mide en unidades cuadradas (m²) y el volumen en unidades cúbicas (m³), y se calculan con fórmulas distintas. En este tema aprenderás a calcular áreas y volúmenes de prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas, y de cuerpos formados por varios de ellos.



Área y volumen: qué miden

Definición: área y volumen

El **área** total de un cuerpo es la suma de las superficies de todas sus caras y se mide en unidades cuadradas. El **volumen** es el espacio que ocupa y se mide en unidades cúbicas. Recuerda que 1 dm³ = 1 litro.

Prismas

Definición: prisma

Un **prisma** tiene dos bases iguales y paralelas, y caras laterales que son paralelogramos. Un **ortoedro** es un prisma con todas las caras rectangulares y un **cubo**, con todas cuadradas.

Regla: prismas

Área lateral $A_L = P_b \cdot h$. **Área total** $A_T = A_L + 2A_b$. **Volumen** $V = A_b \cdot h$. Para un ortoedro: $V = a \cdot b \cdot c$.

Ejemplo 1

Un prisma recto tiene por base un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 cm y altura 10 cm. Calcula volumen y área total.

Hipotenusa: 5. $A_b = 6$ cm². $V = 6 \cdot 10 = 60$ cm³. $A_L = (3+4+5) \cdot 10 = 120$. $A_T = 120 + 12 = 132$ cm².

Pirámides

Regla: pirámides

$A_L = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$, con a_p la **apotema** de la pirámide (altura de una cara lateral).

$A_T = A_L + A_b$. $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$.

Ejemplo 2

Pirámide regular de base cuadrada de lado 6 cm y altura 4 cm. Calcula el volumen y la apotema.

$V = \frac{36 \cdot 4}{3} = 48$ cm³. Apotema: $a_p = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ cm.

Cilindro y cono

Regla: cilindro y cono

Cilindro: $A_L = 2\pi rh$, $A_T = 2\pi r(h+r)$, $V = \pi r^2 h$. **Cono**: $A_L = \pi rg$, $A_T = \pi r(g+r)$, $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, con g la **generatriz** ($g^2 = r^2 + h^2$).

Ejemplo 3

Un cilindro mide 10 cm de altura y 3 cm de radio. Calcula su volumen y cuántos litros contiene.

$V = \pi \cdot 9 \cdot 10 = 90\pi \approx 282{,}7$ cm³ $\approx 0{,}283$ l.

Esfera

Regla: esfera

$A = 4\pi r^2$ y $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ejemplo 4

Calcula la superficie y el volumen de una esfera de radio 3 cm.

$A = 36\pi \approx 113{,}1$ cm². $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi \approx 113{,}1$ cm³.

Cuerpos compuestos y problemas

Método: cuerpos compuestos

1. Descompón el cuerpo en cuerpos sencillos.
2. Calcula volumen y áreas de cada parte.
3. Suma los volúmenes; en las áreas, no cuentes las caras que se unen.

Ejemplo 5

Un silo es un cilindro de 2 m de radio y 6 m de altura con una semiesfera encima. Calcula el volumen.

$V = \pi \cdot 4 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = 24\pi + \frac{16}{3}\pi \approx 92{,}2$ m³.

Desarrollo plano y cuerpos de revolución

Observación

El desarrollo plano de un cilindro es un rectángulo ($2\pi r$ por h) más dos círculos; el de un cono, un sector circular más un círculo. Los cuerpos de revolución se generan al girar una figura plana alrededor de un eje.

¡Atención!

La altura de un cuerpo no es la apotema ni la generatriz. Y no mezcles unidades: pasa todo a la misma antes de calcular.

Área y volumen: qué miden

Definición: área, área lateral, área total y volumen

El **área** mide la superficie de una figura plana o la superficie exterior de un cuerpo, y se expresa en unidades cuadradas. El **área lateral** es la de las caras laterales, y el **área total** es el área lateral más la de las bases. El **volumen** mide el espacio que ocupa un cuerpo y se expresa en unidades cúbicas. Para pasar de una unidad de longitud a otra se multiplica o divide por 10; en superficie, por 100; y en volumen, por

1 000.

Ejemplo 6

Calcula el área total y el volumen de un prisma rectangular de 6 cm, 4 cm y 2 cm.

Volumen: $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ cm³. Área total: $2(6 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2) = 2(24 + 12 + 8) = 88$ cm².

Prismas y pirámides

Regla: prismas y pirámides

En un prisma recto, $A_l = P_b \cdot h$ (perímetro de la base por la altura), $A_t = A_l + 2A_b$ y $V = A_b \cdot h$. En una pirámide, $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$; el área lateral es la suma de las áreas de los triángulos laterales, cada uno de base el lado de la base y altura la apotema de la pirámide, que se calcula con el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 7

Calcula el volumen y el área lateral de una pirámide regular de base cuadrada de 10 cm de lado y 12 cm de altura.

Volumen: $\frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400$ cm³. Apotema: $\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ cm. Área lateral: $4 \cdot \frac{10 \cdot 13}{2} = 260$ cm².

Cuerpos de revolución

Propiedad: cilindro, cono y esfera

Con r el radio y h la altura: el cilindro tiene $V = \pi r^2 h$ y $A_t = 2\pi r(r + h)$; el cono tiene $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $A_t = \pi r(r + g)$ con generatriz $g = \sqrt{r^2 + h^2}$; la esfera tiene $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $A = 4\pi r^2$. Para estos cuerpos se usa $\pi \approx 3{,}14$ o la tecla π de la calculadora, y se redondea al final, no en los pasos intermedios.

Ejemplo 8

Calcula el volumen de un cilindro de 4 cm de radio y 10 cm de altura (con $\pi \approx 3{,}14$) y el de un cono con la misma base y altura.

Cilindro: $3{,}14 \cdot 16 \cdot 10 = 502{,}4$ cm³. Cono: $\frac{1}{3} \cdot 502{,}4 = 167{,}47$ cm³. El cono ocupa un

tercio del cilindro con la misma base y altura.

¡Atención!

- Confundir la altura de una pirámide con su apotema, o la altura de un cono con su generatriz.
- Olvidar las unidades: el área en cm² y el volumen en cm³.
- Usar el diámetro en lugar del radio en las fórmulas del cilindro, cono y esfera.
- Olvidar el factor $\frac{1}{3}$ en pirámides y conos.
- Redondear demasiado pronto: arrastra el error en los cálculos.

Cuerpos compuestos y desarrollos planos

Método: calcular un cuerpo compuesto

1. Descompón el cuerpo en cuerpos sencillos (cilindro, semiesfera, prisma...).
2. Calcula el volumen de cada parte con su fórmula.
3. Suma los volúmenes (o réstalos si hay un hueco).
4. Para el área, suma solo las superficies exteriores: las caras en contacto entre dos partes no cuentan.
5. Expresa el resultado con las unidades correctas.

Ejemplo 9

Un depósito está formado por un cilindro de 2 m de radio y 5 m de altura con una semiesfera encima. Calcula su volumen ($\pi \approx 3{,}14$).

Cilindro: $3{,}14 \cdot 4 \cdot 5 = 62{,}8$ m³. Semiesfera: $\frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 8 \approx 16{,}75$ m³. Total: $79{,}55$ m³, es decir, unos $79\,550$ litros.

Desarrollo plano

El desarrollo plano de un cuerpo es la figura que se obtiene al «abrir» el cuerpo y extender sus caras. El de un prisma está formado por rectángulos y dos bases; el de un cilindro, por un rectángulo de largo $2\pi r$ y alto h y dos círculos; el de un cono, por un sector circular y un círculo. Dibujarlo ayuda a comprobar el cálculo del área y es la base del trabajo con cajas y envases.

¿Sabías que?

Arquímedes de Siracusa, en el siglo III antes de nuestra era, descubrió que una esfera ocupa los dos tercios del volumen del cilindro que la contiene, y se sintió tan orgulloso que pidió que ese dibujo se grabara en su tumba. También se cuenta que descubrió el

principio de la flotación mientras se bañaba, y que gritó «¡Eureka!» al comprender cómo medir el volumen de una corona de oro sumergiéndola en agua.

Principio de Cavalieri y estimación de volúmenes

¿Por qué el volumen de un prisma oblicuo, inclinado como una pila de monedas empujada hacia un lado, es el mismo que el de un prisma recto con igual base y altura? La respuesta la dio el matemático italiano Bonaventura Cavalieri en el siglo XVII y es muy útil para entender las fórmulas de este tema.

Propiedad: principio de Cavalieri

Si dos cuerpos tienen la misma altura y, al cortarlos con cualquier plano paralelo a la base, las dos secciones tienen la misma área, entonces los dos cuerpos tienen el mismo volumen. Por eso todos los prismas y cilindros, rectos u oblicuos, cumplen $V = A_b \cdot h$, y todas las pirámides y conos cumplen $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$.

Ejemplo 10

Una pila de 40 monedas de 2 cm de diámetro y 2 mm de grosor se inclina hasta quedar torcida. ¿Cuál es su volumen? Usa $\pi \approx 3{,}14$.

La pila recta es un cilindro de radio 1 cm y altura $40 \cdot 0{,}2 = 8$ cm. Su volumen es $3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 8 = 25{,}12$ cm³. Al inclinarla, cada moneda sigue teniendo la misma área y la altura total no cambia, así que, por el principio de Cavalieri, el volumen sigue siendo 25,12 cm³. Lo que sí cambia es el área lateral.

Método: comprobar un resultado de volumen

1. Revisa que todas las medidas estén en la misma unidad antes de multiplicar.
2. Comprueba que el resultado esté en unidades cúbicas (cm³, m³) y el área en unidades cuadradas.
3. Haz una estimación: una lata de refresco tiene unos 330 cm³ y una habitación, unos 30 m³.
4. Si piden litros, recuerda que 1 dm³ = 1 L y 1 m³ = 1 000 L.

El consejo de Otto

Para el volumen de pirámides y conos, recuerda que es un tercio del volumen del prisma o cilindro con la misma base y altura. Calcula primero el prisma y divide entre 3.