Soluciones - Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Curso: 2 Eso

Solución del ejercicio 1

a. De m² a dm² y de dm² a cm² hay dos saltos de 100. $2{,}5 \cdot 10\,000 = 25\,000$ cm² (de m² a cm² se multiplica por 100^2).
b. Un litro equivale a un decímetro cúbico, y cada dm³ son 1 000 cm³. $3\ \text{L} = 3\ \text{dm}^3 = 3\,000$ cm³.
c. De dm³ a cm³ se multiplica por 1 000, y cada cm³ es un mililitro. $0{,}4 \cdot 1\,000 = 400$ cm³ $= 400$ mL.
d. Un metro cúbico son 1 000 dm³; para pasar de cm³ a dm³ dividimos entre 1 000. 1 m³ $= 1\,000$ dm³ $= 1\,000$ L. $4\,500$ cm³ $= 4{,}5$ dm³ $= 4{,}5$ L.

En superficie cada escalón vale 100 y en volumen 1 000.

Solución del ejercicio 2

a. El volumen del ortoedro es largo por ancho por alto. $V = 8 \cdot 5 \cdot 3 = 120$ cm³.
b. Hay tres parejas de caras iguales y sumamos sus áreas. Caras: $8 \cdot 5 = 40$ (dos), $8 \cdot 3 = 24$ (dos), $5 \cdot 3 = 15$ (dos). Total: $2(40 + 24 + 15) = 158$ cm².
c. Multiplicamos la superficie de cartón por el precio de cada cm². $158 \cdot 0{,}004 = 0{,}632 \approx 0{,}63$ €.
d. Dividimos el volumen del cubo entre el de una caja. Volumen del cubo: $24^3 = 13\,824$ cm³. $13\,824 : 120 = 115{,}2$: caben 115 cajas completas (la disposición real puede reducirlo).

Respuesta: la caja tiene 120 cm³ y necesita 158 cm² de cartón.

Solución del ejercicio 3

a. Aplicamos $A = 6a^2$ y $V = a^3$ con $a = 6$. $A = 6 \cdot 36 = 216$ cm² y $V = 6^3 = 216$ cm³ (coinciden numéricamente, aunque las unidades son distintas).
b. Buscamos el número que elevado al cubo da 125. $a = \sqrt[3]{125} = 5$ cm.
c. Igualamos la fórmula del área a 150 y despejamos. $6a^2 = 150$, $a^2 = 25$, $a = 5$ cm.
d. Las áreas dependen del cuadrado de la arista y los volúmenes, del cubo. Área: $2^2 = 4$ veces; volumen: $2^3 = 8$ veces.

Recuerda: el área se mide en cm² y el volumen en cm³.

Solución del ejercicio 4

a. La base es un triángulo rectángulo: la hipotenusa cumple $c^2 = a^2 + b^2$. $\sqrt{9+16} = 5$ cm.
b. El área de un triángulo es base por altura entre dos; el volumen, área de la base por altura. $A_b = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$ cm². $V = 6 \cdot 10 = 60$ cm³.
c. El área lateral es el perímetro de la base por la altura del prisma. Perímetro de la base: $3 + 4 + 5 = 12$ cm. $A_l = 12 \cdot 10 = 120$ cm².
d. Al área lateral le sumamos las dos bases. $A_t = A_l + 2A_b = 120 + 12 = 132$ cm².

Respuesta: el prisma tiene 60 cm³ de volumen y 132 cm² de área total.

Solución del ejercicio 5

a. Dentro de la pirámide se forma un triángulo rectángulo con la altura y la mitad del lado. La apotema forma un triángulo rectángulo con la altura (4 cm) y la mitad del lado (3 cm): $\sqrt{16+9} = 5$ cm.
b. Cada cara lateral es un triángulo de base 6 cm y altura la apotema. Cada cara: $\dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ cm². Cuatro caras: 60 cm².
c. Sumamos el área lateral y el área de la base cuadrada. $A_t = 60 + 6^2 = 96$ cm².
d. El volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura. $V = \dfrac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48$ cm³.

Respuesta: 96 cm² de área total y 48 cm³ de volumen.

Solución del ejercicio 6

a. La base es un círculo de radio 5 cm. $A_b = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 25 = 78{,}5$ cm².
b. El volumen del cilindro es el área de la base por la altura. $V = 78{,}5 \cdot 12 = 942$ cm³.
c. El área lateral, al desenrollarla, es un rectángulo de largo $2\pi r$ y alto h. $A_l = 2\pi rh = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 12 = 376{,}8$ cm².
d. El área total es el área lateral más las dos bases. $A_t = 376{,}8 + 2 \cdot 78{,}5 = 533{,}8$ cm².

Respuesta: el cilindro tiene 942 cm³ y 533,8 cm² de superficie total.

Solución del ejercicio 7

a. La altura, el radio y la generatriz forman un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es g. $g = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm.

b. El volumen del cono es un tercio del de un cilindro con igual base y altura. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 9 \cdot 4 = 37{,}68$ cm³.
c. El área lateral del cono se calcula con $\pi r g$. $A_l = \pi r g = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 5 = 47{,}1$ cm².
d. El área total añade el círculo de la base, πr^2. $A_t = 47{,}1 + 3{,}14 \cdot 9 = 47{,}1 + 28{,}26 = 75{,}36$ cm².

Respuesta: el cono tiene 37,68 cm³ de volumen y 75,36 cm² de área total.

Solución del ejercicio 8

a. Sustituimos $r = 6$ en $A = 4\pi r^2$. $A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 36 = 452{,}16$ cm².
b. Sustituimos $r = 6$ en $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, con $6^3 = 216$. $V = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 216 = 904{,}32$ cm³.
c. Al multiplicar el radio por $\frac{1}{2}$, el área queda multiplicada por su cuadrado y el volumen por su cubo. Área: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; volumen: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.
d. Despejamos r^3 dividiendo entre $\frac{4}{3} \cdot 3{,}14$ y hacemos la raíz cúbica. $\frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 = 113{,}04$, $r^3 = 27$, $r = 3$ cm.

Comprobación del último apartado: $\frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 27 = 113{,}04$ cm³.

Solución del ejercicio 9

a. El depósito es un cilindro: $V = \pi r^2 h$. $V = 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot 4 = 3{,}14 \cdot 2{,}25 \cdot 4 = 28{,}26$ m³.
b. Cada metro cúbico equivale a 1 000 litros. $28{,}26$ m³ $= 28\,260$ L.
c. El 75 % de una cantidad se obtiene multiplicando por 0,75. $0{,}75 \cdot 28\,260 = 21\,195$ L.
d. Dividimos la capacidad entre el caudal y pasamos los minutos a horas ($1\,413 = 23 \cdot 60 + 33$). $28\,260 : 20 = 1\,413$ min $= 23$ h 33 min.

Respuesta: el depósito tarda 23 h 33 min en llenarse.

Solución del ejercicio 10

a. El volumen del ortoedro es largo por ancho por profundidad; 1 m³ son 1 000 L. $V = 10 \cdot 4 \cdot 1{,}8 = 72$ m³ $= 72\,000$ L.
b. Se alicatan el fondo y las cuatro paredes, que son dos parejas de rectángulos iguales. Fondo: $10 \cdot 4 = 40$ m². Paredes: $2(10 \cdot 1{,}8) + 2(4 \cdot 1{,}8) = 36 + 14{,}4 = 50{,}4$ m². Total: $90{,}4$ m².

c. Multiplicamos la superficie por el precio del metro cuadrado. $90{,}4 \cdot 25 = 2\,260$ €.
d. El 90 % se calcula multiplicando por 0,9. $0{,}9 \cdot 72\,000 = 64\,800$ L.

Respuesta: alicatar la piscina cuesta 2 260 €.

Solución del ejercicio 11

a. Las cuatro paredes forman un rectángulo de base el perímetro del suelo y altura 2,5 m. $2(5+4) \cdot 2{,}5 = 45$ m².
b. Restamos los huecos de la puerta y de la ventana. $45 - 2 - 1{,}5 = 41{,}5$ m².
c. Dividimos la superficie entre lo que cubre un litro y redondeamos hacia arriba al número de botes. $41{,}5 : 8 \approx 5{,}19$ L. Se necesitan 6 L, es decir, 3 botes de 2 L.
d. Multiplicamos los botes por su precio. $3 \cdot 16{,}50 = 49{,}50$ €.

Respuesta: se necesitan 3 botes y la pintura cuesta 49,50 €.

Solución del ejercicio 12

a. La lata es un cilindro de radio 3,3 cm y altura 12 cm.
$V = 3{,}14 \cdot 3{,}3^2 \cdot 12 = 3{,}14 \cdot 10{,}89 \cdot 12 \approx 410{,}3$ cm³.
b. Como 1 cm³ = 1 mL, el volumen en cm³ coincide con la capacidad en mL. $410{,}3$ mL, algo más que los 330 mL de la etiqueta: la lata no se llena del todo (hay una cámara de aire).
c. La chapa es el área total del cilindro: $2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h)$.
$A_t = 2\pi r(r+h) = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}3 \cdot 15{,}3 \approx 317{,}1$ cm².
d. Multiplicamos la capacidad de la etiqueta por las 6 latas. $6 \cdot 330 = 1\,980$ mL $= 1{,}98$ L.

Solución del ejercicio 13

a. El volumen del cono es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ con $r = 3$ y $h = 10$. $V_c = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 9 \cdot 10 = 94{,}2$ cm³.
b. El volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ con $r = 3$. $V_e = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 27 = 113{,}04$ cm³.
c. Comparamos los dos volúmenes. Sí se desborda: $113{,}04 > 94{,}2$, la bola ocupa más que el cono.
d. Sumamos el volumen del cono y el de media esfera. Media bola: $\frac{113{,}04}{2} = 56{,}52$ cm³. Total: $94{,}2 + 56{,}52 = 150{,}72$ cm³.

Respuesta: la bola derretida no cabe en el cucurucho.

Solución del ejercicio 14

a. Una caja sin tapa tiene cinco caras: el fondo y cuatro laterales. Fondo: 30×20. Cuatro laterales: dos de 30×15 y dos de 20×15.
b. Sumamos las áreas de las cinco caras. $600 + 2 \cdot 450 + 2 \cdot 300 = 600 + 900 + 600 = 2\,100$ cm².
c. Multiplicamos la superficie por el precio del cm² y después por 1 000. Una caja: $2\,100 \cdot 0{,}0004 = 0{,}84$ €. Mil cajas: 840 €.
d. Calculamos el volumen y usamos que 1 000 cm³ = 1 L. $30 \cdot 20 \cdot 15 = 9\,000$ cm³ $= 9$ L.

Respuesta: cada caja necesita 2 100 cm² de cartón y caben 9 litros.

Solución del ejercicio 15

a. El cilindro tiene radio 2 m y altura 8 m: $V = \pi r^2 h$. $V_c = 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 8 = 100{,}48$ m³.
b. La semiesfera es la mitad de una esfera de radio 2 m. $V_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 2^3 = \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 8 \approx 16{,}75$ m³.
c. Sumamos los dos volúmenes y multiplicamos por 1 000 para obtener litros. $V = 100{,}48 + 16{,}75 = 117{,}23$ m³ $= 117\,230$ L.
d. Multiplicamos los m³ por la masa de cada m³ y dividimos entre 1 000 para pasar a toneladas. $117{,}23 \cdot 750 = 87\,922{,}5$ kg $\approx 87{,}9$ toneladas.

Respuesta: el silo admite unas 87,9 toneladas de grano.

Solución del ejercicio 16

a. El volumen del prisma es el área del triángulo de la base por el largo. $V = \frac{2 \cdot 1{,}5}{2} \cdot 3 = 4{,}5$ m³.
b. La altura divide la base en dos mitades de 1 m; el lado inclinado es la hipotenusa. Mitad de la base: 1 m. $l = \sqrt{1 + 2{,}25} = \sqrt{3{,}25} \approx 1{,}80$ m.
c. La lona cubre dos rectángulos inclinados de 1,80 m por 3 m y los dos triángulos de los extremos. Laterales: $2 \cdot (1{,}80 \cdot 3) = 10{,}82$ m². Triangulares: $2 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}5}{2} = 3$ m². Total: $13{,}82$ m².
d. Multiplicamos la superficie total por el precio del m². $13{,}82 \cdot 6 \approx 82{,}92$ €.

Respuesta: la lona cuesta unos 82,92 €.

Solución del ejercicio 17

a. El volumen de la pirámide es un tercio del área de la base por la altura.

$V = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 138 = \frac{1}{3} \cdot 52\,900 \cdot 138 = 2\,433\,400$ m³.

b. La apotema es la hipotenusa del triángulo formado por la altura y la mitad del lado. Mitad del lado: 115 m.
$a = \sqrt{138^2 + 115^2} = \sqrt{19\,044 + 13\,225} = \sqrt{32\,269} \approx 179{,}64$ m.

c. Cada cara lateral es un triángulo de base 230 m y altura la apotema; hay cuatro.
$A_l = 4 \cdot \frac{230 \cdot 179{,}64}{2} = 82\,634{,}4$ m² aprox.

d. En una semejanza de razón k, los volúmenes se multiplican por k^3. Razón $1 : 100$: volumen $\frac{1}{100^3}$ del real: $\frac{2\,433\,400}{1\,000\,000} = 2{,}4334$ m³.

Solución del ejercicio 18

a. Usamos $V = a^3$ para el cubo y $V = \pi r^2 h$ para el cilindro. Cubo: $10^3 = 1\,000$ cm³. Cilindro: $3{,}14 \cdot 25 \cdot 12 = 942$ cm³.

b. Cubo: seis caras cuadradas; cilindro: $2\pi r(r + h)$. Cubo: $6 \cdot 100 = 600$ cm². Cilindro: $2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 17 = 533{,}8$ cm².

c. Comparamos volúmenes y áreas. El cubo tiene más capacidad ($1\,000 > 942$); el cilindro gasta menos material ($533{,}8$).

d. Dividimos el área entre el volumen de cada envase. Cubo: $\frac{600}{1\,000} = 0{,}6$. Cilindro: $\frac{533{,}8}{942} \approx 0{,}567$. El cilindro es algo más eficiente por cm³.

Solución del ejercicio 19

a. Calculamos el volumen del ortoedro y lo pasamos a litros (1 000 cm³ = 1 L).
$60 \cdot 30 \cdot 40 = 72\,000$ cm³ $= 72$ L.

b. El 80 % de 72 L se obtiene multiplicando por 0,8; en altura, el 80 % de 40 cm son 32 cm. $0{,}8 \cdot 72 = 57{,}6$ L (el agua llega a 32 cm).

c. El agua desplazada forma un ortoedro con la misma base que la pecera; su altura es volumen entre base. Superficie del fondo: $60 \cdot 30 = 1\,800$ cm². $3{,}2$ L $= 3\,200$ cm³. Sube $\frac{3\,200}{1\,800} \approx 1{,}78$ cm.

d. Sumamos la subida al nivel inicial y comparamos con 40 cm. El nivel final es $32 + 1{,}78 = 33{,}78$ cm, menor que 40 cm: no se desborda.

Solución del ejercicio 20

a. El cilindro que contiene la esfera tiene radio 3 cm y altura igual al diámetro, 6 cm. $V_c = 3{,}14 \cdot 9 \cdot 6 = 169{,}56$ cm³.

b. Aplicamos $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. $V_e = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 27 = 113{,}04$ cm³.
c. Dividimos los dos volúmenes. $\frac{113{,}04}{169{,}56} = \frac{2}{3}$ (la esfera ocupa los dos tercios del cilindro, el descubrimiento de Arquímedes).
d. En $V = \pi r^2 h$, el radio aparece al cuadrado. El volumen depende de r^2: se multiplica por $2^2 = 4$.