Soluciones del examen - Vectores en el espacio

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · Duración: 60 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. [redacted] : son linealmente independientes y, al ser tres en $\mathbb{R}^3$, forman una base. Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ forman base si y solo si su determinante no es nulo. (1,5 puntos)

b. Se resuelve $\alpha(1,0,2)+\beta(2,1,0)+\gamma(0,1,1)=(3,2,3)$: $\alpha+2\beta=3$, $\beta+\gamma=2$, $2\alpha+\gamma=3$. De la primera $\alpha=3-2\beta$; de la segunda $\gamma=2-\beta$; en la tercera $6-4\beta+2-\beta=3$, $\beta=1$. Entonces $\alpha=1$, $\gamma=1$: coordenadas $(1,1,1)$. Comprobación: $(1,0,2)+(2,1,0)+(0,1,1)=(3,2,3)$. (1,5 puntos)

c. [redacted] , luego $m=\frac{1}{2}$. Para $m=\frac{1}{2}$, $(1,\frac{1}{2},0)=\frac{1}{2}\vec{b}$, así que es combinación lineal de los otros. (1 punto)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $\vec{u}\cdot\vec{v}=2-1+0=1$, $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=\sqrt{2}$. $\cos\alpha=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\approx 0{,}2357$, $\alpha\approx 76{,}4^\circ$. Los módulos: $|\vec{u}|=\sqrt{4+1+4}=3$ y $|\vec{v}|=\sqrt{1+1}$. (1 punto)

b. $\vec{u}\times\vec{v}=(1\cdot 0-(-2)(-1),\ -2\cdot 1-2\cdot 0,\ 2\cdot(-1)-1\cdot 1)=(-2,-2,-3)$, de módulo $\sqrt{17}$. Área: $\frac{\sqrt{17}}{2}\approx 2{,}06$. El triángulo ocupa la mitad del paralelogramo; $\sqrt{4+4+9}=\sqrt{17}$. (1,5 puntos)

c. Se multiplica el unitario por 6: $\pm\dfrac{6}{\sqrt{17}}(-2,-2,-3)$. Comprobación: es paralelo a $\vec{u}\times\vec{v}$ (perpendicular a ambos) y su módulo es $\frac{6}{\sqrt{17}}\sqrt{17}=6$. Hay dos soluciones, de sentidos opuestos. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. [redacted] . Se desarrolla el

determinante por la primera fila. (1,5 puntos)

b. Coplanarios si el producto mixto es cero: $3k - 3 = 0$, $k = 1$. Tres vectores son coplanarios cuando su producto mixto es nulo, es decir, cuando son linealmente dependientes; con $k = 1$ se comprueba que $\vec{b} = 2\vec{a} - \vec{c}$. (1 punto)

c. Con $k = 3$: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 6$. Volumen del tetraedro: $\frac{1}{6} \cdot 6 = 1$ unidad cúbica. Con $k = 3$: $3 \cdot 3 - 3 = 6$. El paralelepípedo tiene volumen 6 y el tetraedro, la sexta parte. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. , , . Producto mixto:

, luego no son coplanarios. Si el producto mixto fuera cero, los cuatro puntos estarían en un mismo plano.

b. , de módulo $\sqrt{36 + 36 + 16} = \sqrt{88}$. Área: $\frac{\sqrt{88}}{2} = \sqrt{22} \approx 4{,}69$. Se toma la mitad del módulo de , porque el triángulo es medio paralelogramo. (1 punto)

c. $V = \frac{1}{6}|-26| = \frac{13}{3} \approx 4{,}33$ unidades cúbicas. Se toma la sexta parte del valor absoluto del producto mixto calculado en a). (1 punto)

d. $h = \dfrac{3V}{\text{área}(ABC)} = \dfrac{13}{\sqrt{22}} \approx 2{,}77$. Se despeja la altura de $V = \frac{1}{3} \cdot \text{área de la base} \cdot h$. (1 punto)

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (10, 30, 30)$ N. $|\vec{R}| = \sqrt{100 + 900 + 900} = \sqrt{1\,900} \approx 43{,}59$ N. Se suman las componentes de las dos fuerzas. (1 punto)

b. $W = \vec{R} \cdot \vec{d} = 60 + 240 + 0 = 300$ J. El trabajo es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento: $10 \cdot 6 + 30 \cdot 8 + 30 \cdot 0$. (1 punto)

c. $|\vec{d}| = 10$ m. $\cos\alpha = \dfrac{300}{43{,}59 \cdot 10} \approx 0{,}6882$, $\alpha \approx 46{,}5°$. El módulo del desplazamiento: $|\vec{d}| = \sqrt{36 + 64} = 10$. (1 punto)

d. La componente vertical $(0, 0, 30)$ es perpendicular a $\vec{d}$ (su producto escalar es 0), así que no realiza trabajo: solo aligera el peso del trineo sobre la nieve. (1 punto)