Apuntes - Vectores en el espacio

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Actividad de introducción: el dron que reparte paquetes

Imagina que diriges un dron de reparto que despega de un almacén. Para indicarle el camino no basta con decir «vuela 170 metros»: hay que decir cuánto avanza hacia el este, cuánto hacia el norte y cuánto sube. Esas tres cantidades forman un vector del espacio, por ejemplo $(120, 90, 80)$. Con él puedes calcular la distancia recorrida, el ángulo con el que el dron cambia de rumbo al llegar al segundo tramo o si dos trayectorias son paralelas. Antes de empezar, piensa en estas preguntas: ¿cómo sumarías dos desplazamientos seguidos? ¿Cómo sabrías si dos tramos del vuelo son perpendiculares sin usar un transportador? ¿Cómo calcularías el área de una lona triangular atada a tres postes de alturas distintas? Las tres preguntas tienen respuesta en este tema gracias a tres operaciones: el producto escalar, el producto vectorial y el producto mixto. Son la base de toda la geometría del espacio que se estudia después en rectas, planos, distancias y ángulos, y aparecen en todos los exámenes de la PAU.

Vectores en el espacio

Definición: vectores en el espacio

Un **vector fijo** $\overrightarrow{AB}$ tiene origen A y extremo B; sus componentes son $B - A$. Un **vector libre** es el conjunto de todos los vectores fijos con el mismo módulo, dirección y sentido. En $\mathbb{R}^3$ se opera por componentes: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ y $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$. El **módulo** es $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ y un vector es **unitario** si su módulo es 1; el unitario en la dirección de $\vec{u}$ es $\vec{u}/|\vec{u}|$.

Dependencia lineal y bases

Definición: dependencia lineal y bases

Vectores $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ son **linealmente dependientes** si alguno es combinación lineal de los demás; equivale a que el rango de la matriz de sus componentes sea menor que k. Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ forman una **base** si son linealmente independientes, es decir, si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$. Todo vector se escribe de forma única como combinación de los de una base; sus coeficientes son las **coordenadas**. En la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$,

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$.

Producto escalar

Definición: producto escalar

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha$, donde α es el ángulo entre los vectores. De aquí:

Propiedades: producto escalar

- $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.
- La **proyección ortogonal** de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es el vector $\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$, de longitud $\dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$.

Ejemplo 1

Para $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (3, 0, 2)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 0 - 2 = 1$, $|\vec{u}| = \sqrt{6}$, $|\vec{v}| = \sqrt{13}$, luego $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{78}} \approx 0{,}113$ y $\alpha \approx 83{,}5°$.

Producto vectorial

Definición: producto vectorial

$\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector con tres propiedades: (1) es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$; (2) su módulo es $|\vec{u}||\vec{v}| \sin\alpha$, es decir, el área del paralelogramo que forman; (3) su sentido es el de la regla de la mano derecha. En componentes:

Propiedades: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$; $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ si y solo si son paralelos;

$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$. El área de un triángulo ABC es $\mathbf{2}$.

Ejemplo 2

Con $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (3, 0, 2)$: $\vec{u} \times \vec{v} = (4 - 0,\ -3 - 2,\ 0 - 6) = (4, -5, -6)$. Su módulo $\sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$ es el área del paralelogramo.

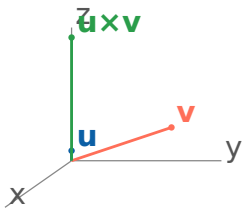


Figura: dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y su producto vectorial, perpendicular a ambos (proyección en perspectiva).

Producto mixto

Definición: producto mixto

El **producto mixto** de tres vectores es $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo que determinan; el volumen del tetraedro es la sexta parte. Los tres vectores son **coplanarios** si y solo si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

Ejemplo 3

Cuatro puntos $A(1, 0, 0)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 2, 1)$, $D(0, 1, 3)$. [illegible] . El determinante vale $1(6 - 1) - 1(0 + 1) + 0 = 4$, así que el volumen del tetraedro es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ u³ y los puntos no son coplanarios.

Aplicaciones geométricas

Propiedades: aplicaciones geométricas

- **Punto medio** de AB: $\frac{1}{2}(A + B)$.
- **Cuarto vértice de un paralelogramo** $ABCD$: [illegible] .
- **Altura** de C sobre AB: [illegible] .
- **Vector perpendicular a dos dados**: su producto vectorial.

Errores frecuentes

¡Atención!

- Pensar que $\vec{u} \times \vec{v}$ es conmutativo: cambia de signo al permutar.
- Confundir producto escalar (un número) con vectorial (un vector).
- Olvidar el valor absoluto al calcular volúmenes y áreas.
- Dividir por 6 para el paralelepípedo o no dividir para el tetraedro.

Más ejemplos resueltos

Ejemplo 4

Los vectores $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 0, 1)$ forman una base porque [redacted]. Para hallar las coordenadas de $\vec{t} = (2, 3, 1)$ se resuelve $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{t}$: $a + c = 2$, $a + b = 3$, $b + c = 1$. Sumando: $a + b + c = 3$, luego $b = 1$, $c = 0$, $a = 2$. Las coordenadas son $(2, 1, 0)$.

Ejemplo 5

¿Para qué valores de k son coplanarios $(1, 2, 3)$, $(0, 1, k)$ y $(2, 5, 7)$? [redacted]. Son coplanarios si $k = 1$, y en ese caso $(2, 5, 7) = 2(1, 2, 3) + (0, 1, 1)$.

Ejemplo 6

En el cubo de arista 1, el ángulo entre la diagonal $(1, 1, 1)$ y una arista $(1, 0, 0)$ cumple $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, de modo que $\alpha \approx 54{,}7^\circ$.

Método: elegir el producto adecuado

1. ¿Ángulo o perpendicularidad? Usa el producto escalar.
2. ¿Área o vector perpendicular? Usa el producto vectorial.
3. ¿Volumen o coplanaridad? Usa el producto mixto (determinante).
4. Escribe el resultado con sus unidades (u, u², u³) y comprueba con una propiedad.

Interpretación geométrica y física de los productos

Propiedad: qué mide cada producto

Cada producto responde a una pregunta distinta, y conviene elegirlo antes de calcular. El producto escalar da un número que mide cuánto apuntan dos vectores en la misma dirección: es positivo si el ángulo es agudo, cero si son perpendiculares y negativo si el ángulo es obtuso. En física es el trabajo de una fuerza a lo largo de un desplazamiento. El producto vectorial da un vector perpendicular a los dos factores, cuyo módulo es el área del paralelogramo que forman; en física es el momento de una fuerza, el efecto de giro que se siente al usar una llave. El producto mixto da un número cuyo valor absoluto es el volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores; si vale cero, los vectores son coplanarios y no forman base.

Método: resolver un problema de geometría con vectores

1. Haz un esquema y escribe las coordenadas de todos los puntos, con sus unidades.
2. Calcula los vectores que unen los puntos restando coordenadas: final menos origen.
3. Decide qué se pide: un ángulo o una perpendicularidad (producto escalar), un área o una dirección perpendicular (producto vectorial), un volumen o una coplanariedad (producto mixto).
4. Haz los cálculos con cuidado de signos y simplifica las raíces.
5. Interpreta el resultado: un área o un volumen es siempre positivo y un ángulo entre vectores está entre 0° y 180°.

Ejemplo 7

Un tejado tiene una placa rectangular de lados $\vec{u} = (2, 0, 0)$ y $\vec{v} = (0;\ 1{,}2;\ 0{,}9)$ metros. Halla su inclinación respecto del suelo.

El vector normal a la placa es $\vec{u} \times \vec{v} = (0;\ -1{,}8;\ 2{,}4)$, de módulo 3. La inclinación de la placa respecto del suelo es igual al ángulo entre su normal y la vertical $(0, 0, 1)$: el coseno vale $2{,}4/3 = 0{,}8$ y el ángulo es de unos 36,9 grados. Observa que no ha hecho falta dibujar el tejado: basta con dos vectores de la placa.

Ejemplo 8

Una mecánica aplica la fuerza $\vec{F} = (0, 40, -30)$ N en el extremo de una llave $\vec{r} = (0{,}3;\ 0;\ 0)$ m. ¿Cuánto vale el momento?

El momento es $\vec{r} \times \vec{F} = (0, 9, 12)$, de módulo 15 N·m. Si la fuerza tuviera una componente a lo largo de la llave, esa parte no cambiaría el momento, porque el producto vectorial de dos vectores paralelos es el vector nulo. Por eso, para aflojar una tuerca, hay que empujar perpendicularmente a la llave y lo más lejos posible de

la tuerca.

¡Atención!

No confundas los tres productos. El producto escalar de dos vectores es un número y no se puede «multiplicar escalarmente» un número por un vector. El producto vectorial no es conmutativo: al cambiar el orden cambia el sentido del resultado. El producto mixto cambia de signo al intercambiar dos vectores, pero su valor absoluto, el volumen, no cambia. Y el área de un triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial, mientras que el volumen de un tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto: olvidar esas fracciones es uno de los errores más repetidos en los exámenes.

Bases ortonormales y coordenadas

Definición: base ortonormal

Una base es ortogonal si sus vectores son perpendiculares dos a dos, y ortonormal si además cada uno tiene módulo 1. La base canónica formada por $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$ es ortonormal, y en ella las fórmulas del producto escalar y del módulo son las sencillas que usamos en todo el tema. Cuando la base no es ortonormal, las coordenadas de un vector se obtienen resolviendo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, como se hace en el tema de sistemas.

Ejemplo 9

Halla las coordenadas de $\vec{p} = (3, 2, 3)$ en la base $\{(1, 0, 2), (2, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

Se busca $\vec{p} = \alpha(1, 0, 2) + \beta(2, 1, 0) + \gamma(0, 1, 1)$. Igualando componentes queda el sistema $\alpha + 2\beta = 3$, $\beta + \gamma = 2$, $2\alpha + \gamma = 3$. Despejando y sustituyendo se obtiene $\beta = 1$, $\alpha = 1$ y $\gamma = 1$, de modo que las coordenadas son $(1, 1, 1)$. Siempre conviene comprobar sumando los tres vectores.

Observación: un poco de historia

Los vectores tal como los usamos hoy son bastante recientes. A mediados del siglo XIX el matemático irlandés William Rowan Hamilton inventó los cuaterniones para describir giros en el espacio, y de ellos salieron los productos escalar y vectorial. Al final de ese siglo, el físico estadounidense Josiah Willard Gibbs y el ingeniero británico Oliver Heaviside los separaron y crearon el cálculo vectorial que se enseña en el bachillerato. Hoy los vectores del espacio se usan en los videojuegos para calcular la luz que llega a cada superficie, en los navegadores de los aviones, en los robots de las fábricas y en los programas de diseño de arquitectura.

El consejo de Otto

Escalar y vectorial no se confunden si piensas en la pregunta: ¿ángulo o perpendicularidad? Escalar. ¿Área o dirección perpendicular? Vectorial. ¿Volumen o coplanaridad? Mixto.