Ejercicios - Vectores en el espacio

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Operaciones con vectores

Un vector del espacio se escribe con tres componentes. Se suman y se restan componente a componente, se multiplican por un número y su módulo es $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. Sean $\vec{u} = (1,\ 2,\ -1)$ y $\vec{v} = (3,\ 0,\ 2)$.

a. Calcula $\vec{u} + \vec{v}$ y $2\vec{u} - 3\vec{v}$.
b. Calcula los módulos $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$.
c. Halla un vector unitario con la dirección y el sentido de $\vec{u}$.
d. ¿Son $\vec{u}$ y $\vec{v}$ proporcionales? Razona la respuesta.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Dependencia lineal y bases

Tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$ si son linealmente independientes, es decir, si el determinante de sus componentes no es cero. Sean $\vec{u} = (1,\ 2,\ -1)$, $\vec{v} = (3,\ 0,\ 2)$, $\vec{w} = (2,\ -2,\ 3)$ y $\vec{t} = (1, 1, 1)$.

a. Estudia si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base.
b. Si no lo es, expresa $\vec{w}$ como combinación de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
c. Estudia si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}\}$ es una base.
d. Halla las coordenadas de $\vec{p} = (2, 7, -1)$ respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}\}$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Producto escalar y ángulo

El producto escalar es $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha$. Sean $\vec{a} = (2,\ -1,\ 3)$ y $\vec{b} = (1,\ 4,\ -2)$.

a. Calcula $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
b. Calcula el ángulo que forman (en grados).
c. Halla k para que $(k, 2, 1)$ sea perpendicular a $\vec{b}$.
d. Halla el valor de m para que $\vec{a}$ y $(m, 2, -6)$ sean paralelos.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Producto vectorial y área

El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, y su módulo es el área del paralelogramo que forman. Sean $\vec{u} = (1,\, 2,\, -1)$ y $\vec{v} = (3,\, 0,\, 2)$.

a. Calcula $\vec{u} \times \vec{v}$.
b. Comprueba que es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.
c. Calcula el área del paralelogramo y la del triángulo que forman.
d. Calcula $\vec{v} \times \vec{u}$ y compáralo con el primer resultado.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Producto mixto y volumen

El producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ es el determinante de las tres componentes; su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo. Sean $\vec{u} = (1,\, 2,\, -1)$, $\vec{v} = (3,\, 0,\, 2)$ y $\vec{w} = (0,\, 1,\, 4)$.

a. Calcula $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
b. Halla el volumen del paralelepípedo.
c. Halla el volumen del tetraedro con las mismas aristas.
d. ¿Qué valor de k haría que $\vec{u}, \vec{v}, (k, 1, 4)$ fueran coplanarios?

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Proyección ortogonal

La proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es $\text{proy}_{\vec{v}}\, \vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\, \vec{v}$. Sean $\vec{u} = (1,\, 2,\, -1)$ y $\vec{v} = (3,\, 0,\, 2)$.

a. Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $|\vec{v}|^2$.
b. Calcula la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.
c. Calcula la componente de $\vec{u}$ perpendicular a $\vec{v}$ y comprueba que es perpendicular.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Vector unitario perpendicular a dos vectores

Para hallar un vector perpendicular a dos dados se hace su producto vectorial, y después se divide entre su módulo.

a. Halla un vector perpendicular a $\vec{u} = (1,\, 2,\, -1)$ y $\vec{v} = (3,\, 0,\, 2)$.
b. Halla los dos vectores unitarios perpendiculares a ambos.
c. Comprueba el resultado.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Puntos y vectores

Se dan los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(5, -2, 1)$ y $C(3, 4, 5)$.

a. Calcula el vector $\overrightarrow{AB}$ y el punto medio de AB.
b. Halla el simétrico de A respecto de B.
c. Halla el baricentro del triángulo ABC.
d. Halla el punto D para que $ABCD$ sea un paralelogramo (con vértices en ese orden).

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Trabajo de una fuerza

El trabajo realizado por una fuerza constante $\vec{F}$ (en newtons) al desplazar un cuerpo un vector $\vec{d}$ (en metros) es $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ (en julios). Una grúa del puerto de Algeciras aplica la fuerza $\vec{F} = (30, 40, 50)$ N a un contenedor ligero que se desplaza según $\vec{d} = (2, 1, 3)$ m en 5 segundos.

a. Calcula el trabajo realizado.
b. Calcula los módulos de la fuerza y del desplazamiento.
c. Calcula el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento.
d. Calcula la potencia media en vatios.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Una rampa de carga

Un carrito de 600 N de peso está sobre una rampa de un almacén. La rampa baja en la dirección del vector unitario $\vec{e} = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$ y el peso es el vector $\vec{P} = (0, 0, -600)$ N.

a. Comprueba que $\vec{e}$ es unitario.
b. Calcula la componente del peso en la dirección de la rampa (la que empuja al carrito hacia abajo).
c. Calcula la componente perpendicular a la rampa (la que aprieta contra el suelo).
d. ¿Qué fuerza mínima hace falta para sujetarlo sin que se deslice (sin rozamiento)?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El dron de reparto

Una empresa de Zaragoza prueba un dron de reparto. Despega del almacén, situado en el origen $A(0, 0, 0)$, sube hasta el punto $B(120, 90, 80)$ en 20 segundos y después vuela en horizontal hasta el punto $C(200, 150, 80)$, sobre la terraza del cliente. Las

coordenadas están en metros.

a. Calcula los vectores y y sus módulos.

b. Calcula la velocidad media del dron en el primer tramo.
c. Calcula el ángulo que forman las direcciones de los dos tramos.
d. Halla la distancia en línea recta entre el almacén y el cliente y compárala con el recorrido real.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – La tienda de campaña

En un camping de los Picos de Europa se monta una tienda con forma de pirámide de base cuadrada. Con el metro como unidad, la base tiene vértices $O(0,0,0)$, $P(2,0,0)$, $Q(2,2,0)$ y $S(0,2,0)$, y el mástil central sostiene el vértice $V(1;\ 1;\ 1{,}5)$.

a. Calcula el área de la cara triangular OPV con el producto vectorial.
b. Calcula la superficie de lona de las cuatro caras laterales.
c. La lona cuesta 12 € el metro cuadrado y se compra un 10 % más por las costuras. ¿Cuánto cuesta?
d. Calcula el volumen interior de la tienda.
e. Calcula el ángulo que forma la cara OPV con el suelo.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Diagonales de una habitación

Una habitación de un piso de Valladolid mide 5 m de largo, 4 m de ancho y 3 m de alto. Se coloca el origen en una esquina del suelo y los ejes a lo largo de las aristas, de modo que la esquina opuesta del techo es $D(5,4,3)$.

a. Calcula la longitud de la diagonal de la habitación.

b. Calcula el ángulo que forma esa diagonal con el suelo.
c. Calcula el ángulo que forman las diagonales de dos paredes que salen de la esquina O: $(5,0,3)$ y $(0,4,3)$.
d. Se quiere tender una guirnalda de luces desde O hasta D pegada a las paredes, pasando por la arista vertical $x=5$, $y=0$. ¿Es más corta o más larga que la diagonal? Razona.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Los cables de una antena

Una antena vertical de 8 m está sujeta en lo alto, $P(0,0,8)$, por cables anclados al suelo. El cable que va a $A(6,0,0)$ y el que va a $B(0,-6,0)$ soportan cada uno una tensión de 500 N dirigida desde P hacia el anclaje. Unidades: metros y newtons.

a. Halla la longitud de cada cable y el vector unitario de cada uno.
b. Escribe las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ y su resultante.
c. La parte horizontal de la resultante empuja la antena. ¿Cuánto vale?
d. Se añade un tercer cable hacia $C(-6, 6, 0)$. ¿Qué tensión debe tener para que la fuerza horizontal total sea nula?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: una escultura de acero

El ayuntamiento de Bilbao encarga una escultura de acero con forma de tetraedro para un parque junto a la ría. El taller la diseña con un programa de ordenador que sitúa sus vértices en los puntos de la tabla (en metros). La escultura se apoya en la cara ABC, que queda sobre el suelo. Para presupuestar el trabajo hay que conocer el volumen (para calcular el peso del relleno) y la superficie de las cuatro caras (para la pintura antioxidante, que cuesta 18 € por metro cuadrado).

Vértice	A	B	C	D
Coordenadas (m)	(0, 0, 0)	(3, 0, 0)	(0, 4, 0)	(1, 1, 5)

a. Calcula el volumen de la escultura con el producto mixto.
b. Calcula el área de cada una de las cuatro caras.
c. Calcula el coste de la pintura de las caras visibles (todas menos la de apoyo).
d. Calcula la distancia del vértice A a la cara BCD usando que $V = \frac{1}{3} \cdot \text{área} \cdot \text{altura}$.
e. Explica por qué el volumen del tetraedro es la sexta parte del producto mixto.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: la placa solar del tejado

Una familia de Almería instala en su tejado una placa solar rectangular. Con el origen en una esquina de la placa, sus lados son los vectores $\vec{u} = (2, 0, 0)$ y $\vec{v} = (0;\ 1{,}2;\ 0{,}9)$, en metros (el eje z es vertical). A mediodía, el vector unitario que apunta hacia el Sol es $\vec{s} = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$. La radiación que llega es de 1 000 W por metro cuadrado perpendicular a los rayos, y la placa aprovecha el 20 % de la energía que recibe. La potencia recibida es proporcional al coseno del ángulo entre el vector normal a la placa y la dirección del Sol.

Dato	Valor
Lados de la placa	(2, 0, 0) y (0; 1,2; 0,9) m
Dirección del Sol	(1, −2, 2)/3
Radiación	1 000 W/m²
Rendimiento	20 %

a. Comprueba que la placa es un rectángulo y calcula sus dimensiones y su área.
b. Halla un vector normal unitario $\vec{n}$ a la placa (que apunte hacia arriba).

c. Calcula la inclinación de la placa respecto del suelo.
d. Calcula el ángulo entre $\vec{n}$ y $\vec{s}$ y la potencia eléctrica que produce la placa.
e. ¿Cómo habría que orientar la placa para producir lo máximo a esa hora? ¿Cuánto produciría?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: la llave del taller

En un taller mecánico de Vigo, una mecánica afloja una tuerca con una llave. El vector que va desde la tuerca hasta el punto donde aplica la mano es $\vec{r} = (0{,}3;\ 0;\ 0)$ m. El efecto de giro de una fuerza $\vec{F}$ se mide con el momento $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, en newtons por metro (N·m); la tuerca se afloja cuando el módulo del momento supera 20 N·m. Primero aplica la fuerza $\vec{F} = (0, 40, -30)$ N.

a. Calcula el módulo de la fuerza.
b. Calcula el momento $\vec{M}$ y su módulo. ¿Se afloja la tuerca?
c. Si añade una componente $(10, 0, 0)$ a la fuerza (empujando a lo largo de la llave), ¿cambia el momento? Explica por qué.
d. ¿Qué fuerza mínima, perpendicular a la llave, hace falta para aflojarla?
e. Con una llave de 40 cm, ¿qué fuerza mínima basta? Relaciónalo con la frase «dadme un punto de apoyo y moveré el mundo».

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: vectores con parámetro

Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, a, 1)$, $\vec{v} = (a, 1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 1, a)$, donde a es un número real. En los exámenes de la PAU es habitual estudiar para qué valores del parámetro forman una base y qué ocurre en los demás casos.

a. Calcula el determinante formado por los tres vectores y factorízalo.
b. ¿Para qué valores de a forman una base de $\mathbb{R}^3$?
c. Para $a = 1$, ¿cuántos vectores linealmente independientes hay entre ellos?
d. Para $a = -2$, expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
e. Para $a = 0$, calcula el volumen del paralelepípedo que determinan.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: la vela de sombra del patio

En el patio de un colegio de Sevilla se instala una vela triangular de tela para dar sombra. Se ata a tres postes de alturas distintas. Tomando el suelo como plano $z = 0$ y el metro como unidad, las esquinas de la vela son $A(0, 0, 3)$, $B(6;\ 0;\ 2{,}5)$ y $C(2, 5, 4)$. La tela cuesta 15 € por metro cuadrado y el cable del borde, 2,50 € por metro.

a. Calcula los vectores , y .

b. Calcula el área de la vela y el coste de la tela.
c. Calcula el perímetro y el coste del cable del borde.
d. Calcula los tres ángulos del triángulo. ¿Es un triángulo rectángulo?
e. El agua de lluvia escurre hacia la esquina más baja. ¿Cuál es? ¿Por qué conviene que la vela no sea horizontal?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: la identidad de Lagrange

Para ir más allá. Si α es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se cumple $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$.

a. Demuestra la identidad de Lagrange: $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$.
b. Compruébala con $\vec{u} = (2, -1, 3)$ y $\vec{v} = (1, 4, -2)$.
c. Usa la identidad para calcular el área del triángulo de lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sin calcular el producto vectorial.
d. Deduce que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz). ¿Cuándo hay igualdad?