Soluciones - Vectores en el espacio

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

Todas las operaciones con vectores del espacio se hacen componente a componente, como en el plano pero con una coordenada más. El módulo se obtiene con el teorema de Pitágoras en tres dimensiones, y para obtener un vector unitario basta dividir el vector entre su módulo.

a. $\vec{u}+\vec{v}=(4,\,2,\,1)$. $2\vec{u}=(2,4,-2)$ y $3\vec{v}=(9,0,6)$, luego $2\vec{u}-3\vec{v}=(-7,\,4,\,-8)$.
b. $|\vec{u}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$ y $|\vec{v}|=\sqrt{9+0+4}=\sqrt{13}$.
c. $\vec{u}/|\vec{u}|=\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{-1}{\sqrt{6}}\right)$. Su módulo es $\sqrt{(1+4+1)/6}=1$.
d. No. Si fueran proporcionales, el cociente $3/1=3$ de la primera componente se repetiría en la segunda: $0/2=0\neq 3$.

Solución del ejercicio 2

a. [redacted]. Los vectores son linealmente dependientes: no forman base.
b. Se busca $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$: $\alpha+3\beta=2$, $2\alpha=-2$, $-\alpha+2\beta=3$. De la segunda, $\alpha=-1$; de la tercera, $\beta=1$; la primera se cumple ($-1+3=2$). Así $\vec{w}=-\vec{u}+\vec{v}$.
c. [redacted]. Sí es una base.
d. Se resuelve $\vec{p}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{t}$: $a+3b+c=2$, $2a+c=7$, $-a+2b+c=-1$. Restando la tercera de la segunda: $3a-2b=8$; restando la primera de la segunda: $a-3b=5$. De aquí $a=2$, $b=-1$, $c=3$. Coordenadas $(2,-1,3)$.

Solución del ejercicio 3

El producto escalar se calcula multiplicando las componentes correspondientes y sumando. Su signo informa del ángulo: positivo si es agudo, cero si es recto y negativo si es obtuso. Para que dos vectores sean paralelos sus componentes deben ser proporcionales.

a. $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 1+(-1)\cdot 4+3\cdot(-2)=2-4-6=-8$.

b. $|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{21}$ y $\cos\alpha = \dfrac{-8}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \dfrac{-8}{\sqrt{294}} \approx -0{,}4666$. Entonces $\alpha \approx 117{,}8^\circ$ (ángulo obtuso, porque el producto escalar es negativo).
c. $(k, 2, 1) \cdot (1, 4, -2) = k + 8 - 2 = 0$, luego $k = -6$.
d. Deben ser proporcionales: $\dfrac{m}{2} = \dfrac{2}{-1} = \dfrac{-6}{3}$. Las dos últimas razones valen -2, luego $m = -4$.

Solución del ejercicio 4

El producto vectorial se calcula desarrollando un determinante cuya primera fila son los vectores i, j, k. El resultado es perpendicular a los dos vectores y su módulo es el área del paralelogramo; el triángulo tiene la mitad de esa área.

a. .

b. $(4, -5, -6) \cdot (1, 2, -1) = 4 - 10 + 6 = 0$ y $(4, -5, -6) \cdot (3, 0, 2) = 12 + 0 - 12 = 0$.
c. $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77} \approx 8{,}77$. El área del paralelogramo es $\sqrt{77}$ y la del triángulo, $\frac{\sqrt{77}}{2} \approx 4{,}39$.
d. $\vec{v} \times \vec{u} = (-4, 5, 6) = -(\vec{u} \times \vec{v})$: el producto vectorial es anticonmutativo.

Solución del ejercicio 5

El producto mixto es el determinante formado por las componentes de los tres vectores. Su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo, el tetraedro tiene la sexta parte, y si vale cero los tres vectores están en un mismo plano.

a. .

b. $V = |-29| = 29$ unidades cúbicas.
c. $V_{tetr} = \frac{1}{6} \cdot 29 \approx 4{,}83$.
d. Hace falta , luego $k = \frac{29}{4}$.

Solución del ejercicio 6

Para proyectar un vector sobre otro se mide cuánto avanza en su dirección con el producto escalar y se multiplica por el vector unitario. Lo que queda al restar la proyección es la componente perpendicular, y siempre conviene comprobar que su producto escalar es cero.

a. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3+0-2 = 1$ y $|\vec{v}|^2 = 13$.
b. $\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{1}{13}(3,0,2) = (\frac{3}{13},\ 0,\ \frac{2}{13})$.
c. $\vec{u}_\perp = \vec{u} - \text{proy} = (1-\frac{3}{13},\ 2,\ -1-\frac{2}{13}) = (\frac{10}{13},\ 2,\ -\frac{15}{13})$. Comprobación: $\vec{u}_\perp\cdot\vec{v} = \frac{10}{13}\cdot 3 + 0 - \frac{15}{13}\cdot 2 = \frac{30-30}{13} = 0$.

Solución del ejercicio 7

El producto vectorial de dos vectores no paralelos da directamente un vector perpendicular a ambos. Para que sea unitario se divide entre su módulo, y hay dos soluciones, una en cada sentido, porque el vector opuesto también es perpendicular.

a. Es $\vec{u}\times\vec{v} = (4,-5,-6)$.
b. Su módulo es $\sqrt{77}$. Los dos vectores unitarios son $\pm\dfrac{1}{\sqrt{77}}(4,-5,-6)$.
c. El producto escalar con $\vec{u}$ vale $\frac{4-10+6}{\sqrt{77}} = 0$ y con $\vec{v}$ vale $\frac{12-12}{\sqrt{77}} = 0$; el módulo es $\sqrt{(16+25+36)/77} = 1$.

Solución del ejercicio 8

Las coordenadas de un vector se obtienen restando las del origen a las del extremo. El punto medio es la semisuma de coordenadas, el baricentro es la media de los tres vértices y en un paralelogramo los lados opuestos son vectores iguales.

a. [redacted] y $M = \dfrac{A+B}{2} = (3,0,2)$.
b. El simétrico A' cumple que B es el punto medio de AA': $A' = 2B - A = (9,-6,-1)$.
c. $G = \dfrac{A+B+C}{3} = \left(\dfrac{9}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{9}{3}\right) = \left(3,\dfrac{4}{3},3\right)$.
d. En el paralelogramo [redacted], luego

$$D = A + C - B = (1+3-5,\ 2+4+2,\ 3+5-1) = (-1,8,7).$$

Solución del ejercicio 9

El trabajo de una fuerza es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento: solo cuenta la parte de la fuerza que actúa en la dirección del movimiento. La potencia media es el trabajo dividido entre el tiempo empleado.

a. $W = 30\cdot 2 + 40\cdot 1 + 50\cdot 3 = 60+40+150 = 250$ J.
b. $|\vec{F}| = \sqrt{900+1600+2500} = \sqrt{5000} \approx 70{,}71$ N y $|\vec{d}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$ m.
c. $\cos\alpha = \dfrac{250}{70{,}71\cdot 3{,}74} \approx 0{,}9449$, luego $\alpha \approx 19{,}0^\circ$.

d. $P = W/t = 250/5 = 50$ W.

Solución del ejercicio 10

El peso se descompone en dos partes perpendiculares: una a lo largo de la rampa, que se obtiene con el producto escalar por el vector unitario de la rampa, y otra perpendicular a ella, que se calcula con el teorema de Pitágoras.

a. $|\vec{e}| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$.

b. $\vec{P} \cdot \vec{e} = 0 + 0 + \frac{1800}{5} = 360$ N.

c. La perpendicular cumple $360^2 + N^2 = 600^2$, de donde $N = \sqrt{600^2 - 360^2} = \sqrt{230\,400} = 480$ N.

d. Hace falta una fuerza de 360 N hacia arriba a lo largo de la rampa.

Solución del ejercicio 11

Cada tramo del vuelo es un vector que se obtiene restando coordenadas de puntos. Las distancias son módulos, la velocidad media es la distancia entre el tiempo y el cambio de rumbo es el ángulo entre los dos vectores, que se calcula con el producto escalar.

a. , con m.

, con m.

b. $v = \dfrac{170}{20} = 8{,}5$ m/s.

c. . Entonces $\cos\alpha = \dfrac{15\,000}{170 \cdot 100} \approx 0{,}8824$ y $\alpha \approx 28{,}1^\circ$.

d. y m. El recorrido real mide $170 + 100 = 270$ m, unos 7,5 m más que la línea recta.

Solución del ejercicio 12

El área de cada cara triangular es la mitad del módulo del producto vectorial de dos de sus lados. El volumen de la pirámide se calcula con la fórmula de la geometría elemental y el ángulo con el suelo es el que forman los vectores normales.

a. y .



. El área es $\frac{1}{2}\sqrt{0+9+4} = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}80$ m².

b. Por simetría las cuatro caras son iguales: $4 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21$ m².
c. $7{,}21 \cdot 1{,}1 \cdot 12 \approx 95{,}19$ €.
d. $V = \frac{1}{3} \cdot \text{área de la base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 2$ m³.
e. El ángulo entre dos planos es el de sus vectores normales: $(0, -3, 2)$ y el del suelo $(0, 0, 1)$. $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \approx 0{,}5547$, luego $\alpha \approx 56{,}3°$.

Solución del ejercicio 13



a. m.

b. El ángulo con el suelo β cumple $\sin\beta = \dfrac{3}{\sqrt{50}} \approx 0{,}4243$ (la altura dividida entre la diagonal). Por tanto $\beta \approx 25{,}1°$.
c. Producto escalar: $25 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 9 = 9$. Módulos: $\sqrt{34}$ y 5. $\cos\gamma = \dfrac{9}{5\sqrt{34}} \approx 0{,}3087$, luego $\gamma \approx 72{,}0°$.
d. Más larga: la línea recta OD es el camino más corto entre dos puntos. Cualquier recorrido apoyado en las paredes mide más de $7{,}07$ m (al desplegar las paredes, el camino más corto por ellas mide $\sqrt{(5+4)^2+3^2} = \sqrt{90} \approx 9{,}49$ m si se dobla en la esquina vertical).

Solución del ejercicio 14

Cada tensión es un vector con la dirección del cable: se multiplica el vector unitario del cable por el valor de la tensión. La resultante es la suma de los vectores, y para anular la parte horizontal se plantea una igualdad componente a componente.

a.  y , los dos de módulo $\sqrt{36+64} = 10$ m.

Unitarios: $(0{,}6;\ 0;\ -0{,}8)$ y $(0;\ -0{,}6;\ -0{,}8)$.
b. $\vec{F}_A = 500 \cdot (0{,}6;\ 0;\ -0{,}8) = (300, 0, -400)$ y $\vec{F}_B = (0, -300, -400)$. Resultante: $(300, -300, -800)$ N.
c. La parte horizontal es $(300, -300, 0)$, de módulo $\sqrt{90\,000 \cdot 2} = 300\sqrt{2} \approx 424{,}26$ N.
d.  mide $\sqrt{136}$. Con tensión T, la parte horizontal es $\dfrac{T}{\sqrt{136}}(-6, 6)$, que debe valer $(-300, 300)$: $\dfrac{6T}{\sqrt{136}} = 300$, de donde $T = 50\sqrt{136} \approx 583{,}10$ N.

Solución del ejercicio 15

a.  , , . .

Volumen: $\frac{60}{6} = 10$ m³.

b. ABC: $\frac{1}{2}|(0,0,12)| = 6$ m². BCD:  ,

área $\frac{\sqrt{650}}{2} \approx 12{,}75$ m². ABD: $(3,0,0) \times (1,1,5) = (0,-15,3)$, área $\frac{\sqrt{234}}{2} \approx 7{,}65$ m². ACD: $(0,4,0) \times (1,1,5) = (20,0,-4)$, área $\frac{\sqrt{416}}{2} \approx 10{,}20$ m².

c. Caras visibles: $12{,}75 + 7{,}65 + 10{,}20 \approx 30{,}59$ m². Coste: $30{,}59 \cdot 18 \approx 550{,}69$ €.

d. $h = \dfrac{3V}{\text{área}(BCD)} = \dfrac{30}{12{,}75} \approx 2{,}35$ m.

e. El producto mixto da el volumen del paralelepípedo construido sobre las tres aristas. Ese paralelepípedo se divide en dos prismas triangulares iguales (mitad), y cada prisma se descompone en tres tetraedros del mismo volumen. Por eso el tetraedro es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ del paralelepípedo.

Solución del ejercicio 16

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, así que los lados son perpendiculares. $|\vec{u}| = 2$ m y $|\vec{v}| = \sqrt{1{,}44 + 0{,}81} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$ m. Área: $2 \cdot 1{,}5 = 3$ m² (también $|\vec{u} \times \vec{v}| = 3$).

b. $\vec{u} \times \vec{v} = (0 \cdot 0{,}9 - 0 \cdot 1{,}2,\ 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0{,}9,\ 2 \cdot 1{,}2 - 0) = (0;\ -1{,}8;\ 2{,}4)$, de módulo 3. Normal unitario: $\vec{n} = (0;\ -0{,}6;\ 0{,}8)$, con tercera componente positiva.

c. El ángulo de la placa con el suelo es el de $\vec{n}$ con $\vec{k} = (0,0,1)$: $\cos\theta = 0{,}8$, luego $\theta \approx 36{,}9°$.

d. $\cos\varphi = \vec{n} \cdot \vec{s} = \frac{1}{3}(0 + 1{,}2 + 1{,}6) = \frac{2{,}8}{3} \approx 0{,}9333$, $\varphi \approx 21{,}0°$. Potencia: $1\,000 \cdot 3 \cdot 0{,}9333 \cdot 0{,}2 = 560$ W.

e. Lo máximo se obtiene con $\vec{n} = \vec{s}$ (coseno igual a 1): la placa perpendicular a los rayos. Produciría $1\,000 \cdot 3 \cdot 0{,}2 = 600$ W, solo 40 W más; por eso una inclinación fija bien elegida es suficiente.

Solución del ejercicio 17

a. $|\vec{F}| = \sqrt{0 + 1\,600 + 900} = 50$ N.



b. . $|\vec{M}| = \sqrt{81 + 144} = 15$ N·m : no se afloja.

c. No cambia: $\vec{r} \times (10, 0, 0) = \vec{0}$ porque los dos vectores son paralelos. Empujar a lo largo de la llave no produce giro.
d. Con $\vec{F} \perp \vec{r}$ es $|\vec{M}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}|$, así que hace falta $0{,}3 \cdot F = 20$, $F = \frac{20}{0{,}3} \approx 66{,}7$ N.
e. $F = \frac{20}{0{,}4} = 50$ N. Cuanto más largo es el brazo, menos fuerza hace falta: es la ley de la palanca, que Arquímedes resumió con esa frase.

Solución del ejercicio 18

a. Desarrollando por la primera fila:
$1 \cdot (a-1) - a(a^2-1) + 1 \cdot (a-1) = 2(a-1) - a(a-1)(a+1) = (a-1)(2 - a - a^2) = -(a-1)^2(a+2)$
.
b. Forman base si el determinante no es cero: $a \neq 1$ y $a \neq -2$.
c. Si $a = 1$, los tres vectores son $(1, 1, 1)$: solo hay uno independiente (rango 1).
d. Con $a = -2$: $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (-2, 1, 1)$, $\vec{w} = (1, 1, -2)$. Se observa que $\vec{u} + \vec{v} = (-1, -1, 2) = -\vec{w}$, luego $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$. Comprobación: $-(1, -2, 1) - (-2, 1, 1) = (1, 1, -2)$.
e. Con $a = 0$: $-(0-1)^2(0+2) = -2$, y el volumen es $|-2| = 2$ unidades cúbicas.

Solución del ejercicio 19

a. , y .
b. . Su módulo es $\sqrt{6{,}25 + 49 + 900} \approx 30{,}91$, y el área $\approx 15{,}45$ m². Coste de la tela: $15{,}45 \cdot 15 \approx 231{,}80$ €.
c. , , . Perímetro $\approx 18{,}07$ m; cable: $18{,}07 \cdot 2{,}5 \approx 45{,}19$ €.
d. En A: , $\hat{A} \approx 69{,}6°$. En B, con : $\hat{B} \approx 51{,}3°$. Entonces $\hat{C} \approx 59{,}1°$. Ningún ángulo es recto: no es rectángulo.
e. La esquina más baja es B (altura 2,5 m). Si la vela fuera horizontal, el agua se acumularía en el centro y la tela se rompería con el peso.

Solución del ejercicio 20

a. Elevando al cuadrado y sumando:
$|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\sin^2\alpha + |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\cos^2\alpha = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$.

b. $\vec{u}\times\vec{v} = (2-12,\ 3+4,\ 8+1) = (-10, 7, 9)$, de módulo al cuadrado $100+49+81 = 230$. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2-4-6 = -8$, al cuadrado 64. Suma: 294. Y $|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 = 14\cdot 21 = 294$. Se cumple.

c. $|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{14\cdot 21 - 64} = \sqrt{230}$ y el área del triángulo es $\frac{\sqrt{230}}{2} \approx 7{,}58$.

d. Como $|\vec{u}\times\vec{v}|^2 \geq 0$, resulta $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leq |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ y, sacando raíces, $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$. Hay igualdad si y solo si $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$, es decir, si los vectores son paralelos.