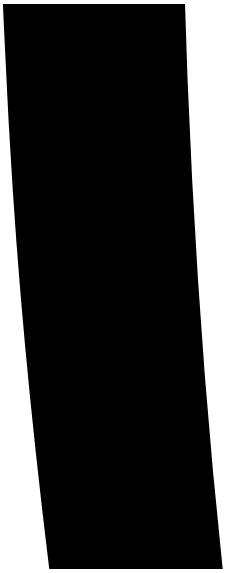
Soluciones del examen - Sistemas de ecuaciones

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · Duración: 60 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

Matriz ampliada y reducción (2 puntos):



La última fila da $-6z = -12$, luego $z = 2$ (0,5 puntos). La segunda da $-5y + z = -8$, luego $-5y = -10$ e $y = 2$ (0,5 puntos). La primera da $x = 7 - 2y - z = 7 - 4 - 2 = 1$ (0,5 puntos).

Comprobación: $1 + 4 + 2 = 7$, $2 - 2 + 6 = 6$ y $3 + 2 - 4 = 1$ (0,5 puntos).

El sistema es compatible determinado, con solución única $(1, 2, 2)$; las transformaciones elementales usadas no cambian las soluciones.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

Por Sarrus, los productos directos suman $9 + a - 2a = 9 - a$ y los inversos $-3 + a^2 + 6 = a^2 + 3$. Entonces $|A| = 6 - a - a^2 = -(a - 2)(a + 3)$ (1 punto).

Si $a \neq 2$ y $a \neq -3$: $|A| \neq 0$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 3$ y el sistema es compatible determinado (0,5 puntos).

Si $a = -3$: $F_2 - 2F_1 = (0, 1, -1 \,|\, 1)$ y $F_3 - F_1 = (0, -4, 4 \,|\, 1)$. Al sumar 4 veces la primera a la segunda queda $(0, 0, 0 \,|\, 5)$: $\operatorname{rg} A = 2$ y $\operatorname{rg} A^* = 3$, sistema incompatible (1 punto).

Si $a = 2$: $F_2 - 2F_1 = (0, 1, 4 \,|\, 1)$ y $F_3 - F_1 = (0, 1, 4 \,|\, 1)$ coinciden, así que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 2 < 3$: compatible indeterminado (0,5 puntos). De $y + 4z = 1$ se obtiene $y = 1 - 4z$ y de la primera $x = 1 - y + z = 5z$. Soluciones: $(5t,\ 1 - 4t,\ t)$ (0,75 puntos). Con $t = 1$: $5 - 3 - 1 = 1$, $10 - 9 + 2 = 3$ y $5 - 6 + 3 = 2$ (0,25 puntos).

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

Por Sarrus, $|A| = 3 - (-6) = 9$: los productos directos suman $6 - 1 - 2 = 3$ y los inversos $1 - 4 - 3 = -6$ (1 punto).

Se sustituye cada columna por los términos independientes: $|A_1| = 9$, $|A_2| = 18$ y $|A_3| = 27$ (2 puntos).

$x = \frac{9}{9} = 1$, $y = \frac{18}{9} = 2$ y $z = \frac{27}{9} = 3$ (0,5 puntos). Comprobación: $2 - 2 + 3 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$ y $1 - 4 + 9 = 6$ (0,5 puntos).

Cramer se puede aplicar porque el sistema es cuadrado y $|A| \neq 0$. Por ejemplo, desarrollando por la primera fila, $|A_1| = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot (-18) = 9$.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. Con x, y, z los precios de croissant, napolitana y café: . Cada ecuación iguala el coste de un pedido con lo que se pagó. (1 punto)

b. Restando la tercera de la primera: $-x + z = 0{,}2$, luego $z = x + 0{,}2$. En la segunda: $x + 2y + x + 0{,}2 = 6{,}4$, es decir, $y = 3{,}1 - x$. En la primera: $2x + 3{,}1 - x + 3x + 0{,}6 = 8{,}9$, $4x = 5{,}2$, $x = 1{,}3$. Entonces $y = 1{,}8$ y $z = 1{,}5$. Comprobación: $2{,}6 + 1{,}8 + 4{,}5 = 8{,}9$, $1{,}3 + 3{,}6 + 1{,}5 = 6{,}4$ y $3{,}9 + 1{,}8 + 3 = 8{,}7$. (2 puntos)

c. $2 \cdot 1{,}3 + 2 \cdot 1{,}5 = 2{,}6 + 3 = 5{,}60$ €. (1 punto)

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. . La tercera fila es la suma de las dos primeras, también en los términos independientes ($700 + 800 = 1\,500$). Entonces $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 2 < 3$: compatible indeterminado. (1,5 puntos)

b. Solo hay dos ecuaciones independientes para tres incógnitas: queda un grado de libertad y hay infinitas combinaciones de precios que explican las ventas. (0,5 puntos)

c. De las dos primeras, simplificadas: $4x + 2y + z = 140$ y $x + 2y + z = 80$. Restando, $3x = 60$, $x = 20$. Entonces $2y + z = 60$. Con $z = 2y$: $4y = 60$, $y = 15$ y $z = 30$. Camiseta 20 €, pantalón 15 €, sudadera 30 €. Comprobación: $400 + 150 + 150 = 700$ y $200 + 300 + 300 = 800$. (1,5 puntos)

d. $10 \cdot 20 + 10 \cdot 15 + 10 \cdot 30 = 650$ €. (0,5 puntos)