Apuntes - Sistemas de ecuaciones

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Actividad de introducción: los tres cafés de la mañana

Tres amigas toman cada mañana algo en la cafetería de la estación. Lucía pide 2 cafés y 1 tostada y paga 4,10 €. Marta pide 1 café y 2 tostadas y paga 4,60 €. Con esos dos datos puedes calcular el precio de un café y el de una tostada. Pero un día aparece una tercera amiga, Elena, que pide 3 cafés y 3 tostadas y paga 8,70 €. Ahora hay tres ecuaciones y solo dos incógnitas. Antes de calcular nada, piensa: ¿puede haber un error en la factura? ¿Qué relación tienen las tres ecuaciones entre sí? Si el precio de Elena fuera 8,70 € el sistema tendría solución; con otro precio no la tendría. Esta pregunta, saber si un sistema tiene solución, si es única o si hay infinitas, es el centro del tema. La resolveremos con el teorema de Rouché-Frobenius, que compara el rango de la matriz de coeficientes con el de la ampliada, y aprenderemos a calcular las soluciones con el método de Gauss y la regla de Cramer, también cuando aparecen parámetros.

Sistemas lineales y su forma matricial

Definición: sistemas lineales y su forma matricial

Un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** se escribe en forma matricial $AX = B$, donde A es la **matriz de coeficientes**, X el vector de incógnitas y B el de términos independientes. La **matriz ampliada** es $A^* = (A \mid B)$. Resolver el sistema es hallar todos los vectores X que cumplen todas las ecuaciones a la vez. Geométricamente, con tres incógnitas, cada ecuación es un plano del espacio y las soluciones son los puntos comunes a todos ellos.

Teorema de Rouché-Frobenius

Definición: teorema de Rouché-Frobenius

Sea n el número de incógnitas. El sistema es:

Propiedades: teorema de Rouché-Frobenius

- **Compatible determinado (SCD)**, una única solución, si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = n$.
- **Compatible indeterminado (SCI)**, infinitas soluciones, si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$. El número de parámetros libres es $n - \text{rango}(A)$.
- **Incompatible (SI)**, sin solución, si $\text{rango}(A)$.

Con tres planos, el SCD es un punto, el SCI de un parámetro es una recta (o los tres planos comparten una recta), el SCI de dos parámetros es un plano (los tres planos coinciden) y el SI corresponde a planos que se cortan dos a dos sin punto común o a planos paralelos.

Método de Gauss

Definición: método de Gauss

Consiste en hacer operaciones elementales sobre las filas de A^* (cambiar filas, multiplicar una fila por un número no nulo y sumar a una fila un múltiplo de otra) hasta obtener un sistema **escalonado**, que se resuelve de abajo arriba. Las operaciones no cambian las soluciones. Si aparece una fila $(0\,0\,0\,|\,c)$ con $c \neq 0$, el sistema es incompatible. Si aparece una fila de ceros, esa ecuación sobra.

Ejemplo 1

Resuelve $x+y+z=6,\ 2x-y+z=3,\ x+2y-z=2$. Con F_2-2F_1 y F_3-F_1:



. Con $3F_3+F_2$:



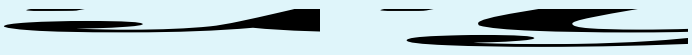
. De la última, $z=3$; de la segunda, $-3y-3=-9 \Rightarrow y=2$; de la primera, $x=6-2-3=1$. Solución: $(1,2,3)$.

Regla de Cramer

Definición: regla de Cramer

Si el sistema tiene tantas ecuaciones como incógnitas y $|A| \neq 0$, la solución es única y viene dada por $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$, donde A_i es la matriz A con la columna i sustituida por B. También se puede hallar $X = A^{-1}B$. Cramer exige que $|A| \neq 0$: no sirve para sistemas indeterminados salvo que se aplique tras suprimir ecuaciones sobrantes y pasar incógnitas al segundo miembro.

Ejemplo 2



Para $x+y=3,\ x-y=1$: $|A|=-2$, y

.

Sistemas indeterminados

Definición: sistemas indeterminados

Si el rango es menor que el número de incógnitas, se eligen como **parámetros** las incógnitas sobrantes y se resuelve el resto en función de ellas.

Ejemplo 3

$x+y+z=3,\ x-y+2z=1$. Rango 2 y 3 incógnitas: 1 parámetro. Sea $z=\lambda$: $x+y=3-\lambda$ y $x-y=1-2\lambda$. Sumando, $2x=4-3\lambda \Rightarrow x=2-\frac{3}{2}\lambda$; entonces $y=3-\lambda-x=1+\frac{1}{2}\lambda$. Soluciones: $(2-\frac{3}{2}\lambda,\ 1+\frac{1}{2}\lambda,\ \lambda)$.

Sistemas homogéneos

Definición: sistemas homogéneos

Si todos los términos independientes son 0, el sistema es siempre compatible, porque $X=0$ es solución. Tiene solución distinta de la trivial si y solo si $\text{rango}(A)$; en un sistema cuadrado, si y solo si $|A|=0$.

Discusión de sistemas con parámetros

Definición: discusión de sistemas con parámetros

Es el ejercicio típico de la PAU. El procedimiento es: (1) calcular $|A|$ y hallar los valores del parámetro que lo anulan; (2) para los demás valores, el sistema es SCD (rango $=3$); (3) para cada valor crítico, sustituir y calcular los rangos de A y A^* para clasificar; (4) resolver cuando se pida.

Ejemplo 4

$mx+y+z=1,\ x+my+z=m,\ x+y+mz=m^2$. Aquí $|A|=(m-1)^2(m+2)$. Si $m\neq 1,-2$: SCD. Si $m=1$: las tres ecuaciones son $x+y+z=1$, $x+y+z=1$, $x+y+z=1$: SCI con 2 parámetros. Si $m=-2$: sumando las tres ecuaciones se obtiene $0=1-2+4=3$, imposible: SI.

Errores frecuentes

¡Atención!

- Concluir que el sistema es incompatible porque el determinante es cero: puede ser SCI.
- Olvidar estudiar $\text{rango}(A^*)$ en los valores críticos.
- Aplicar Cramer cuando $|A|=0$.
- No comprobar la solución en las ecuaciones originales.

Cómo resolver un problema de enunciado

Observación

Los problemas con texto (precios, edades, mezclas) se convierten en sistemas lineales. Se eligen las incógnitas con significado concreto, se traduce cada frase a una ecuación, se resuelve por Gauss o Cramer y se comprueba que la solución tiene sentido (por ejemplo, que no salgan cantidades negativas ni fraccionarias de personas). Redacta siempre la respuesta con unidades: «Cada cuaderno cuesta 2 euros».

Ejemplo completo de discusión

Ejemplo 5

Discute $x+y+z=2,\ 2x+3y+z=3,\ x+2y+mz=1$. Escalonando: $F_2-2F_1=(0,1,-1\,|\,-1)$ y $F_3-F_1=(0,1,m-1\,|\,-1)$; luego $F_3'-F_2'=(0,0,m\,|\,0)$. Si $m\neq 0$: rango 3, SCD, y la solución es $z=0$, $y=-1$, $x=3$. Si $m=0$: la última fila es nula, rango 2 en ambas matrices y 3 incógnitas: SCI con 1 parámetro; con $z=\lambda$ resulta $y=-1+\lambda$, $x=3-2\lambda$.

Observa que no hemos calculado ningún determinante: el método de Gauss lleva directamente a la discusión. En la PAU puedes elegir el método que prefieras; lo importante es justificar cada paso y no olvidar los valores críticos del parámetro.

Método: discutir un sistema con parámetro

1. Calcula $|A|$ y halla los valores del parámetro que lo anulan.
2. Para los demás valores, el sistema es SCD (rango 3).
3. Para cada valor crítico, sustituye y calcula $r(A)$ y $r(A^*)$.
4. Clasifica con Rouché-Frobenius y resuelve si se pide.

Cómo discutir un sistema paso a paso

Método: discusión de un sistema con parámetro

1. Escribe la matriz de coeficientes A y la ampliada A^*.
2. Calcula $|A|$ (si es cuadrada) y factorízalo: sus raíces son los valores críticos del parámetro.
3. Para los valores no críticos, $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} A^*=n$ y el sistema es compatible determinado: resuélvelo con Cramer.
4. Para cada valor crítico, sustitúyelo y calcula $\operatorname{rg} A$ y $\operatorname{rg} A^*$ con Gauss o con menores.
5. Clasifica: si $\operatorname{rg} A\neq\operatorname{rg} A^*$, incompatible; si son iguales y menores que n, indeterminado con $n-\operatorname{rg} A$ parámetros.

6. Resuelve los casos indeterminados y escribe un resumen final con todos los casos.

Ejemplo 6

Discute el sistema  **según a.**

El determinante de la matriz de coeficientes es $2a^2 - 4a - (a^2 - a) + 2 = a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2)$. Si a es distinto de 1 y de 2, el sistema es compatible determinado. Si $a = 1$, las ecuaciones son $x + y + z = 2$, $x + 2y + z = 3$ y $x + 4y + z = 5$. Restando las dos primeras queda $y = 1$, y restando la segunda de la tercera queda $2y = 2$, que dice lo mismo. Los rangos valen 2 y el sistema es compatible indeterminado: $x + z = 1$, $y = 1$. Si $a = 2$, las ecuaciones son $x + y + z = 2$, $x + 2y + 2z = 3$ y $x + 4y + 4z = 5$. Restando la primera de las otras dos resultan $y + z = 1$ y $3y + 3z = 3$, que son equivalentes. De nuevo los rangos valen 2 y el sistema es compatible indeterminado, con $x = 1$ e $y + z = 1$.

Problemas de enunciado y la geometría de los sistemas

Propiedad: tres planos y sus posiciones

Cada ecuación lineal con tres incógnitas es un plano. Un sistema compatible determinado corresponde a tres planos que se cortan en un solo punto; uno compatible indeterminado con un parámetro, a tres planos que comparten una recta (o dos planos coincidentes y un tercero que los corta); con dos parámetros, a tres planos coincidentes. Un sistema incompatible corresponde a planos sin punto común: dos paralelos, o los tres cortándose dos a dos en rectas paralelas (el llamado prisma triangular). Esta lectura geométrica permite comprobar la discusión.

Ejemplo 7

Una librería de Salamanca vende novelas, cómics y revistas. En una semana ingresa 560 € por la venta de 80 libros en total. Las novelas cuestan 12 €, los cómics 8 € y las revistas 4 €, y se venden tantos cómics como novelas y revistas juntas. ¿Cuántos libros de cada tipo se venden?

Sean x, y y z el número de novelas, cómics y revistas. Las condiciones dan $x + y + z = 80$, $12x + 8y + 4z = 560$ e $y = x + z$. Sustituyendo $y = x + z$ en la primera: $2x + 2z = 80$, o sea $x + z = 40$, de donde $y = 40$. En la segunda, $12x + 320 + 4z = 560$, es decir, $12x + 4z = 240$ y $3x + z = 60$. Restando $x + z = 40$ queda $2x = 20$, luego $x = 10$ y $z = 30$. Se venden 10 novelas, 40 cómics y 30 revistas. Comprobación: $120 + 320 + 120 = 560$ €.

¡Atención!

- Decidir por el determinante que un sistema es incompatible: si $|A| = 0$ hay que estudiar los rangos, porque puede ser indeterminado.
- Calcular solo $\operatorname{rg} A$ y olvidar $\operatorname{rg} A^*$.
- Aplicar Cramer cuando $|A| = 0$: la regla solo vale si el determinante es distinto de cero.
- Olvidar el caso general (parámetro no crítico) al resumir la discusión.
- Multiplicar una fila por un número que puede valer cero sin estudiar ese valor del parámetro.

Observación: cómo puntúa la PAU una discusión

En el examen de Matemáticas II suele pedirse discutir un sistema con un parámetro y resolverlo para un valor concreto. La nota se reparte entre el planteamiento (matrices y determinante), la discusión de cada caso con los rangos justificados y la resolución final. Una discusión sin los rangos escritos pierde casi todos los puntos aunque la conclusión sea correcta. Termina siempre con una frase que recoja todos los casos, por ejemplo: «si $a \neq 1, 2$ compatible determinado; si $a = 1$ incompatible; si $a = 2$ compatible indeterminado».

¿Sabías que?

El método de eliminación que hoy llamamos de Gauss aparece ya en el libro chino «Los nueve capítulos sobre el arte matemático», de hace unos dos mil años, donde los sistemas se resolvían colocando los números en una tabla y restando columnas. Gauss lo popularizó en Europa al usarlo para calcular la órbita del asteroide Ceres. Hoy los ordenadores resuelven sistemas de millones de ecuaciones para prever el tiempo, diseñar aviones o calcular el reparto de la electricidad.

El consejo de Otto

Cuenta las incógnitas antes de empezar. El número de parámetros libres es siempre $n - \text{rango}$. Si ves un SCI y no te sale ningún parámetro, algo falla.