Ejercicios - Sistemas de ecuaciones

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Forma matricial y comprobación

Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas se escribe en forma matricial como $AX = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X el vector de incógnitas y B el de términos independientes. Se considera [illegible].

a. Escribe A, X, B y la matriz ampliada A^*.
b. Comprueba si $(1, 2, 1)$ es solución.
c. Comprueba si $(1, 1, 2)$ es solución.
d. Calcula $|A|$ y deduce cuántas soluciones tiene el sistema.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Método de Gauss: solución única

Resuelve por el método de Gauss el sistema [illegible].

a. Escribe la matriz ampliada.
b. Haz ceros bajo el primer pivote y luego bajo el segundo.
c. Resuelve por sustitución hacia atrás.
d. Comprueba la solución en las tres ecuaciones.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Sistema compatible indeterminado

Estudia y resuelve el sistema [illegible].

a. Aplica Gauss a la matriz ampliada.
b. Calcula $\operatorname{rg} A$ y $\operatorname{rg} A^*$ y clasifica el sistema.
c. Halla todas las soluciones en función de un parámetro.
d. Da dos soluciones particulares y compruébalas.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Teorema de Rouché-Frobenius

El teorema de Rouché-Frobenius dice que un sistema es compatible si y solo si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^*$. Estudia el sistema .

a. Calcula el rango de la matriz de coeficientes.
b. Calcula el rango de la matriz ampliada.
c. Clasifica el sistema y explica el resultado.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Regla de Cramer

Si $|A| \neq 0$, la solución de $AX = B$ es $x_i = |A_i|/|A|$, donde A_i resulta de cambiar la columna i por B. Resuelve .

a. Calcula $|A|$.
b. Calcula $|A_1|$, $|A_2|$ y $|A_3|$.
c. Obtén x, y, z y comprueba.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Sistema homogéneo

Un sistema es homogéneo si todos sus términos independientes son cero. Siempre admite la solución trivial $(0, 0, 0)$. Se considera .

a. Calcula el determinante de la matriz de coeficientes.
b. Deduce si hay soluciones distintas de la trivial.
c. Resuelve el sistema y comprueba una solución.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Discusión de un sistema con parámetro

Discute y resuelve según los valores de m el sistema .

a. Calcula el determinante de la matriz de coeficientes y factorízalo.
b. Estudia el caso general (sistema de Cramer).

c. Estudia $m = 1$.
d. Estudia $m = -2$.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Más ecuaciones que incógnitas

Hay sistemas con más ecuaciones que incógnitas. Considera  .

a. Resuelve las dos primeras ecuaciones.
b. ¿Para qué valor de c es compatible el sistema?
c. Clasifica el sistema para $c = 4$ con Rouché-Frobenius.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Entradas del concierto

Para un concierto en un auditorio de Valencia se venden entradas de grada (20 €), de preferente (35 €) y de VIP (60 €). Se han vendido 400 entradas con una recaudación de 11 500 €. Además, se han vendido el doble de entradas de preferente que de VIP.

a. Llama x, y, z al número de entradas de cada tipo y escribe el sistema.
b. Resuélvelo por sustitución o por Gauss.
c. Calcula el porcentaje de la recaudación que aporta cada tipo de entrada.
d. Si el auditorio tiene 450 asientos, ¿cuántos quedan libres y qué recaudaría si se llenara con la misma proporción?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Mezcla de abonos

Un agricultor de La Rioja quiere preparar 100 kg de abono con 14 kg de nitrógeno (N) y 13 kg de fósforo (P). Dispone de tres abonos comerciales, cuya composición aparece en la tabla.

	N	P	K
Abono A	20 %	10 %	10 %
Abono B	10 %	20 %	10 %
Abono C	10 %	10 %	20 %

a. Llama x, y, z a los kilos de los abonos A, B y C y escribe el sistema (una ecuación por cada condición: total, N y P).
b. Resuélvelo.
c. ¿Cuántos kilos de potasio (K) contiene la mezcla?
d. Si el kilo de A cuesta 0,90 €, el de B 0,80 € y el de C 1,10 €, ¿cuánto cuesta la

mezcla?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Plan de inversión familiar

Una familia de Sevilla invierte 30 000 € en tres productos: un depósito al 2 %, un fondo al 3 % y un bono al 5 % anual. El primer año obtiene 1 050 € de intereses. Además, lo invertido en el bono es el doble de lo invertido en el depósito.

a. Plantea el sistema con x, y, z (euros en depósito, fondo y bono).
b. Resuélvelo.
c. Calcula la rentabilidad media de toda la inversión.
d. ¿Qué intereses habría dado todo el dinero en el depósito?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Menú del comedor escolar

Una dietista del comedor de un colegio de Alicante diseña un menú con pasta, pollo y verdura. Las cantidades se miden en raciones de 100 g y la tabla recoge el aporte de cada ración. El menú debe aportar 575 kcal, 47 g de proteínas y 84 g de hidratos.

por 100 g	kcal	proteínas (g)	hidratos (g)
Pasta	350	12	72
Pollo	165	31	0
Verdura	30	2	6

a. Llama x, y, z al número de raciones de pasta, pollo y verdura y escribe el sistema.
b. Simplifica la ecuación de los hidratos y despeja z.
c. Resuelve el sistema.
d. Escribe el menú en gramos de cada alimento.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Vehículos en el aparcamiento

En el aparcamiento de un polígono de Zaragoza hay 60 vehículos entre coches (4 ruedas), motos (2 ruedas) y camiones (6 ruedas). En total se cuentan 220 ruedas y hay tantos coches como motos y camiones juntos.

a. Plantea el sistema con x coches, y motos y z camiones.
b. Resuélvelo por sustitución.
c. ¿Cuántos vehículos de cada tipo hay?
d. Si cada coche paga 1,50 € la hora, cada moto 0,60 € y cada camión 3 €, ¿cuánto se ingresa en una hora?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Problema: la glorieta del centro

Una glorieta de una ciudad gallega tiene cuatro tramos de circulación x_1 (de A a B), x_2 (de B a C), x_3 (de C a D) y x_4 (de D a A), medidos en vehículos por hora. En cada cruce entran y salen vehículos por las calles de acceso, según la tabla. En cada cruce, los vehículos que entran son tantos como los que salen.

Cruce	Entran (veh/h)	Salen (veh/h)
A	300	200
B	150	250
C	200	100
D	250	350

a. Escribe la ecuación de conservación en cada uno de los cuatro cruces.
b. Resuelve el sistema y expresa todo en función de x_1.
c. Los tramos no pueden tener flujo negativo. ¿Cuál es el mínimo valor de x_1?
d. Por seguridad, ningún tramo puede superar 400 vehículos por hora. Halla el intervalo posible de x_1.
e. Si $x_1 = 300$, calcula x_2, x_3 y x_4.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Leyes de Kirchhoff en un circuito

En un circuito con una pila de 11 V y tres ramas, las intensidades I_1, I_2 e I_3 (en amperios) cumplen las leyes de Kirchhoff: en el nudo, $I_1 = I_2 + I_3$; en la primera malla, $2I_1 + 4I_2 = 11$ y en la segunda, $4I_2 - 6I_3 = 0$ (resistencias en ohmios).

a. Escribe el sistema en la forma $AX = B$ con $X = (I_1, I_2, I_3)^t$.
b. Resuélvelo despejando I_1 e I_3 en función de I_2.
c. Calcula las tres intensidades.
d. Comprueba la ley del nudo y calcula la potencia total $P = 11 \cdot I_1$.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Discusión con un parámetro y soluciones

Discute según a el sistema [redacted] y resuélvelo cuando sea posible.

a. Calcula $|A|$ y halla los valores críticos de a.
b. Estudia $a = 0$.
c. Estudia $a = 3$ y resuelve.
d. Resuelve el caso general por Cramer.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Parábola por tres puntos

Una cámara registra la trayectoria de un balón de baloncesto en un entrenamiento de Madrid, y tres puntos de la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ son $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(-1, 6)$ (coordenadas en metros respecto de un origen fijo).

a. Plantea el sistema que deben cumplir a, b y c.
b. Resuélvelo.
c. Escribe la parábola y calcula su vértice.
d. ¿Es el vértice un máximo o un mínimo? ¿Cuál es la altura mínima?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Tres planos en el espacio

Cada ecuación de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es un plano. Se consideran los planos $\pi_1 : x + y + z = 1$, $\pi_2 : x - y + z = 3$ y $\pi_3 : 3x + y + 3z = 4$.

a. Comprueba que no hay dos planos paralelos comparando sus vectores normales.
b. Estudia el sistema que forman con Rouché-Frobenius.
c. Interpreta geométricamente el resultado.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Ajuste de una reacción química

Para ajustar la combustión del etano, $a\,\mathrm{C_2H_6} + b\,\mathrm{O_2} \to c\,\mathrm{CO_2} + d\,\mathrm{H_2O}$, se exige que el número de átomos de cada elemento sea igual en los dos miembros. Es un sistema homogéneo.

a. Escribe una ecuación para el carbono, otra para el hidrógeno y otra para el oxígeno.
b. Resuélvelo en función de a.
c. Elige los menores enteros positivos y escribe la reacción ajustada.
d. Comprueba el balance de átomos.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Problema: el reparto de las 100 hectáreas

Una cooperativa agrícola de Castilla y León dispone de 100 hectáreas que reparte entre cereal (x), olivar (y) y viñedo (z), en hectáreas enteras. Los costes de cultivo son de 300, 500 y 800 € por hectárea y la cooperativa dispone exactamente de 40 000 €. Los beneficios son de 400, 700 y 1 200 € por hectárea, respectivamente.

a. Plantea el sistema y estudia su compatibilidad.
b. Resuelve el sistema en función de un parámetro k entero.

c. ¿Entre qué valores puede variar k para que las superficies sean no negativas y enteras?
d. Calcula el beneficio en función de k y halla el reparto de máximo beneficio.
e. La cooperativa decide plantar al menos 20 ha de olivar. ¿Cuál es ahora el mejor reparto y su beneficio?