Soluciones - Sistemas de ecuaciones

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. , $X = (x, y, z)^t$, $B = (1, 6, 7)^t$ y .

b. Se sustituye $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ en el primer miembro de cada ecuación: primera: 3 (debería ser 1); segunda: 2 (debería ser 6); tercera: 8 (debería ser 7). No es solución.

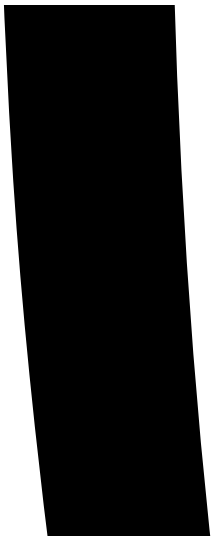
c. Con $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$: primera: 1 (se cumple); segunda: 6 (se cumple); tercera: 7 (se cumple). Sí es solución.

d. Por Sarrus, los productos directos suman $2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 = -2 + 9 - 2 = 5$ y los inversos $(-1)(-1) \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 3 + 12 + 1 = 16$. Entonces $|A| = 5 - 16 = -11 \neq 0$: el rango es 3 y el sistema tiene una única solución, que es $(1, 1, 2)$.

Solución del ejercicio 2

a. .

b. Se hacen ceros: $F_2 - 2F_1$, $F_3 - F_1$ y después se combina $F_2 - 5F_3$ para anular la segunda columna de la segunda fila.



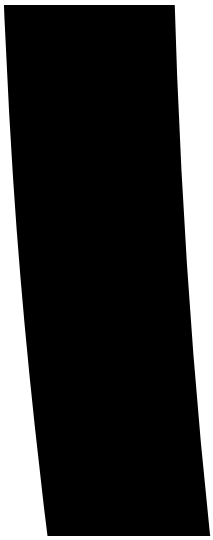
c. La segunda fila queda $-12z = 12$, luego $z = -1$. La tercera fila da $-y + 3z = -5$, es decir, $y = -3z + 5 = 2$. La primera da $x = 6 - 2y + z = 6 - 4 - 1 = 1$.

d. $1 + 4 + 1 = 6$, $2 - 2 - 1 = -1$ y $1 + 2 - 2 = 1$. Se cumplen las tres. Solución:

$(1, 2, -1)$.

Solución del ejercicio 3

a. La matriz ampliada es y la reducción es



b. Quedan dos filas no nulas: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 2$ incógnitas. El sistema es compatible indeterminado, con $3 - 2 = 1$ parámetro.
c. La segunda fila es $3y - 5z = 3$. Se toma $z = 3s$: $y = 1 + 5s$ y de la primera ecuación $x = 1 + y - 2z = 1 + 1 + 5s - 6s = 2 - s$. Soluciones: $(x, y, z) = (2 - s,\ 1 + 5s,\ 3s)$, $s \in \mathbb{R}$.
d. Con $s = 0$: $(2, 1, 0)$, que cumple $2 - 1 + 0 = 1$, $4 + 1 - 0 = 5$, $6 + 0 = 6$. Con $s = 1$: $(1, 6, 3)$, que cumple $1 - 6 + 6 = 1$, $2 + 6 - 3 = 5$, $3 + 3 = 6$.

Solución del ejercicio 4

a. $|A| = 0$ (la tercera fila es $2F_1 + F_2$ en coeficientes: $2(1, 1, 1) + (1, -1, 1) = (3, 1, 3)$). El menor , luego $\operatorname{rg} A = 2$.
b. Con la ampliada: $2 \cdot 1 + 3 = 5 \neq 4$, es decir, la tercera ecuación no es $2E_1 + E_2$ en los términos independientes. El menor (columnas 1, 2 y 4), luego $\operatorname{rg} A^* = 3$.
c. Como $\operatorname{rg} A = 2 \neq 3 = \operatorname{rg} A^*$, el sistema es incompatible: no tiene solución. Las dos primeras ecuaciones obligan a que la tercera valga $2 \cdot 1 + 3 = 5$, pero dice 4.

Solución del ejercicio 5

La regla de Cramer se aplica cuando el determinante de la matriz de coeficientes no es cero. Cada incógnita es el cociente entre el determinante obtenido al sustituir su columna por los términos independientes y el determinante del sistema.

a. [redacted] .

b. $|A_1| = 1$, $|A_2| = 2$ y $|A_3| = 2$.
c. $x = 1$, $y = 2$ y $z = 2$. Comprobación: $1 + 2 = 3$, $2 - 2 + 2 = 2$, $1 + 2 + 2 = 5$.

Solución del ejercicio 6

a. Por Sarrus, los productos directos suman $1 \cdot 1 \cdot (-3) + (-1)(-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = -3 + 1 + 8 = 6$ y los inversos $2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \cdot (-3) = 2 - 2 + 6 = 6$. El determinante vale 0.
b. Como $|A| = 0$, el rango es menor que 3: el sistema es compatible indeterminado y hay infinitas soluciones, además de la trivial.
c. Con $F_2 - 2F_1 = (0, 3, -5)$ y $F_3 - F_1 = (0, 3, -5)$, la tercera ecuación sobra y el rango es 2. De $3y = 5z$ se toma $z = 3t$, $y = 5t$ y de la primera $x = y - 2z = 5t - 6t = -t$. Soluciones: $(-t, 5t, 3t)$. Con $t = 1$: $-1 - 5 + 6 = 0$, $-2 + 5 - 3 = 0$, $-1 + 10 - 9 = 0$.

Solución del ejercicio 7

a. $|A| = m^3 - 3m + 2 = (m - 1)^2(m + 2)$ (el cálculo es el del ejercicio 7 del tema de determinantes).
b. Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 3$: compatible determinado. Por Cramer, $x = -\dfrac{m+1}{m+2}$, $y = \dfrac{1}{m+2}$ y $z = \dfrac{(m+1)^2}{m+2}$.
c. Si $m = 1$, las tres ecuaciones son $x + y + z = 1$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 1$, compatible indeterminado con dos parámetros: $(1 - s - t,\ s,\ t)$.
d. Si $m = -2$, $\operatorname{rg} A = 2$ (hay un menor no nulo de orden 2) y $\operatorname{rg} A^* = 3$ (el menor de las columnas 1, 2 y 4 vale distinto de cero). El sistema es incompatible.

Solución del ejercicio 8

Con más ecuaciones que incógnitas, se resuelven dos de ellas y se sustituye la solución en la tercera. El sistema solo es compatible si la tercera ecuación se cumple, lo que fija el valor del parámetro.

a. Sumando: $3x = 3$, $x = 1$ e $y = 2$.
b. La tercera ecuación debe cumplirse con $(1, 2)$: $c = 1 + 4 = 5$.

c. Con $c = 4$: $\operatorname{rg} A = 2$ y $\operatorname{rg} A^* = 3$ (el determinante [redacted] es distinto de cero), por tanto es incompatible.

Solución del ejercicio 9

Se define una incógnita para cada tipo de entrada y se traduce cada dato del enunciado en una ecuación. Después se resuelve por Gauss y se comprueba que las cantidades son números naturales con sentido.

a. [redacted].

b. Con $y = 2z$: $x + 3z = 400$ y $20x + 130z = 11\,500$. De la primera, $x = 400 - 3z$; entonces $8\,000 - 60z + 130z = 11\,500$, $70z = 3\,500$, $z = 50$, $y = 100$, $x = 250$.

c. Grada: $250 \cdot 20 = 5\,000$ € (43,5 %). Preferente: $100 \cdot 35 = 3\,500$ € (30,4 %). VIP: $50 \cdot 60 = 3\,000$ € (26,1 %).

d. Quedan libres $450 - 400 = 50$ asientos. Con la misma proporción se recaudaría $11\,500 \cdot \frac{450}{400} = 12\,937{,}50$ €.

Solución del ejercicio 10

Cada ecuación expresa una condición: la masa total y la cantidad de cada nutriente. Las cantidades de nutriente se calculan multiplicando los kilos de cada abono por su porcentaje expresado como decimal.

a. [redacted].

b. Como $y + z = 100 - x$, la segunda ecuación es $0{,}2x + 0{,}1(100 - x) = 14$, es decir, $0{,}1x + 10 = 14$ y $x = 40$. La tercera se escribe $0{,}1(x + y + z) + 0{,}1y = 13$, esto es, $10 + 0{,}1y = 13$ y $y = 30$. Entonces $z = 100 - 40 - 30 = 30$.

c. A: $0{,}1 \cdot 40 = 4$ kg. B: $0{,}1 \cdot 30 = 3$ kg. C: $0{,}2 \cdot 30 = 6$ kg. Total de K: 13 kg.

d. $40 \cdot 0{,}9 + 30 \cdot 0{,}8 + 30 \cdot 1{,}1 = 36 + 24 + 33 = 93$ €.

Solución del ejercicio 11

Se plantean tres ecuaciones: la cantidad total invertida, los intereses obtenidos y la relación entre las inversiones. Se resuelve el sistema y se comprueba que las cantidades encontradas cumplen los tres datos.

a. [redacted].

b. Con $z = 2x$: $y = 30\,000 - 3x$. En la segunda ecuación: $0{,}02x + 0{,}03(30\,000 - 3x) + 0{,}1x = 1\,050$, es decir, $0{,}02x + 900 - 0{,}09x + 0{,}1x = 1\,050$, $0{,}03x = 150$ y $x = 5\,000$. Entonces $y = 15\,000$ y $z = 10\,000$.
c. $\dfrac{1\,050}{30\,000} = 0{,}035$: una rentabilidad del $3{,}5\ \%$.
d. $30\,000 \cdot 0{,}02 = 600$ €, es decir, 450 € menos.

Solución del ejercicio 12

a.  .
b. Dividiendo entre 6: $12x + z = 14$, luego $z = 14 - 12x$.
c. En proteínas: $12x + 31y + 2(14 - 12x) = 47$, es decir, $-12x + 31y = 19$. En calorías: $350x + 165y + 30(14 - 12x) = 575$, es decir, $-10x + 165y = 155$ o $-2x + 33y = 31$. Multiplicando la última por 6: $-12x + 198y = 186$. Restando: $167y = 167$, $y = 1$. Entonces $x = \dfrac{31 - 19}{12} = 1$ y $z = 14 - 12 = 2$.
d. Pasta 100 g, pollo 100 g y verdura 200 g. Comprobación: $350 + 165 + 60 = 575$ kcal, $12 + 31 + 4 = 47$ g y $72 + 0 + 12 = 84$ g.

Solución del ejercicio 13

Se cuenta por separado el número de vehículos y el número de ruedas, multiplicando cada tipo de vehículo por sus ruedas. La tercera condición relaciona las cantidades y completa un sistema de tres ecuaciones.

a.  .
b. Sustituyendo $x = y + z$ en la primera: $2x = 60$, $x = 30$ y $y + z = 30$. En la segunda: $120 + 2y + 6z = 220$, es decir, $y + 3z = 50$. Restando $y + z = 30$: $2z = 20$, $z = 10$ e $y = 20$.
c. 30 coches, 20 motos y 10 camiones.
d. $30 \cdot 1{,}5 + 20 \cdot 0{,}6 + 10 \cdot 3 = 45 + 12 + 30 = 87$ € por hora.

Solución del ejercicio 14

a. A: $x_4 + 300 = x_1 + 200$. B: $x_1 + 150 = x_2 + 250$. C: $x_2 + 200 = x_3 + 100$. D: $x_3 + 250 = x_4 + 350$.
b. Despejando: $x_1 - x_4 = 100$, $x_2 = x_1 - 100$, $x_3 = x_2 + 100$ y $x_4 = x_3 - 100$. Resulta $x_2 = x_1 - 100$, $x_3 = x_1$, $x_4 = x_1 - 100$. El sistema es compatible indeterminado con un parámetro (la cuarta ecuación es combinación de las otras

tres).
c. Hace falta $x_2 = x_1 - 100 \geq 0$ y $x_4 = x_1 - 100 \geq 0$, luego $x_1 \geq 100$.
d. Todos los flujos son ≤ 400: $x_1 \leq 400$ y $x_3 = x_1 \leq 400$. El intervalo es $100 \leq x_1 \leq 400$.
e. $x_2 = 200$, $x_3 = 300$ y $x_4 = 200$.

Solución del ejercicio 15

Las leyes de Kirchhoff dan una ecuación en el nudo, porque la intensidad que entra es igual a la que sale, y una en cada malla, porque la suma de caídas de tensión es igual a la tensión de la pila.

a. [redacted] con y $B = (0, 11, 0)^t$.
b. De la tercera, $I_3 = \frac{2}{3} I_2$. De la primera, $I_1 = I_2 + \frac{2}{3} I_2 = \frac{5}{3} I_2$.
c. En la segunda: $2 \cdot \frac{5}{3} I_2 + 4 I_2 = 11$, $\frac{22}{3} I_2 = 11$, $I_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$ A. Entonces $I_1 = 2{,}5$ A e $I_3 = 1$ A.
d. $I_2 + I_3 = 1{,}5 + 1 = 2{,}5 = I_1$. Potencia: $P = 11 \cdot 2{,}5 = 27{,}5$ W.

Solución del ejercicio 16

a. Por Sarrus, los productos directos suman $9 + a + 2a = 9 + 3a$ y los inversos $3 + a^2 + 6 = 9 + a^2$, de modo que $|A| = 3a - a^2 = -a(a - 3)$. Los valores críticos son $a = 0$ y $a = 3$.
b. Con $a = 0$: $\operatorname{rg} A = 2$ (las filas cumplen $F_3 = 3F_1 - F_2$) pero la misma relación en los términos independientes daría $3 \cdot 1 - 3 = 0 \neq 3$, así que $\operatorname{rg} A^* = 3$. Sistema incompatible.
c. Con $a = 3$: $F_3 = -3F_1 + 2F_2$ y en los términos independientes $-3 + 6 = 3$: se cumple. Entonces $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 2$ y hay un parámetro. De $F_2 - 2F_1$: $y + z = 1$, luego $x = 0$. Soluciones: $(0,\ 1 - t,\ t)$, $t \in \mathbb{R}$.
d. Si $a \neq 0$ y $a \neq 3$: $x = \dfrac{a - 3}{a}$, $y = \dfrac{2}{a}$, $z = \dfrac{1}{a}$. Comprobación con $a = 1$: $(-2, 2, 1)$, que cumple $-2 + 2 + 1 = 1$, $-4 + 6 + 1 = 3$ y $-2 + 2 + 3 = 3$.

Solución del ejercicio 17

Cada punto de la gráfica da una ecuación lineal en los coeficientes de la parábola, al sustituir sus coordenadas. Con tres puntos se forma un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

a. [redacted].
b. Restando la tercera de la primera: $2b = -4$, $b = -2$. Restando la primera de la

segunda: $3a + b = 1$, $3a = 3$, $a = 1$. Entonces $c = 2 - 1 + 2 = 3$.

c. $y = x^2 - 2x + 3$. El vértice está en $x = -\dfrac{b}{2a} = 1$ y vale $y = 1 - 2 + 3 = 2$: es el punto $(1, 2)$.

d. Como $a = 1 > 0$, es un mínimo, y la altura mínima es 2 m.

Solución del ejercicio 18

a. Los normales son $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ y $(3, 1, 3)$. Ningún par es proporcional, luego no hay planos paralelos ni coincidentes.

b. Es el sistema del ejercicio 4: $\operatorname{rg} A = 2$ y $\operatorname{rg} A^* = 3$. Es incompatible.

c. Los tres planos no tienen ningún punto común. Como el rango de A es 2 y los planos son distintos dos a dos, se cortan dos a dos en rectas paralelas: forman un prisma triangular.

Solución del ejercicio 19

Se iguala el número de átomos de cada elemento a los dos lados de la reacción. Resulta un sistema homogéneo indeterminado, y se elige la solución con los menores números naturales posibles.

a. C: $2a = c$. H: $6a = 2d$. O: $2b = 2c + d$.

b. $c = 2a$, $d = 3a$ y $2b = 4a + 3a = 7a$, luego $b = \frac{7}{2}a$.

c. Con $a = 2$ se obtienen enteros: $b = 7$, $c = 4$, $d = 6$. Reacción: $2\,C_2H_6 + 7\,O_2 \to 4\,CO_2 + 6\,H_2O$.

d. Carbono: $2 \cdot 2 = 4$. Hidrógeno: $2 \cdot 6 = 12 = 6 \cdot 2$. Oxígeno: $7 \cdot 2 = 14 = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1$.

Solución del ejercicio 20

a. $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 300x + 500y + 800z = 40\,000 \end{cases}$. Dos ecuaciones independientes y tres incógnitas: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 2$, compatible indeterminado con un parámetro.

b. De la primera, $x = 100 - y - z$. En la segunda: $30\,000 + 200y + 500z = 40\,000$, es decir, $2y + 5z = 100$. Para que y sea entero hace falta que z sea par: $z = 2k$, $y = 50 - 5k$ y $x = 50 + 3k$.

c. Hace falta $y \geq 0$, o sea $k \leq 10$, y $z \geq 0$, o sea $k \geq 0$. Hay once repartos, de $k = 0$ a $k = 10$.

d. $B = 400(50 + 3k) + 700(50 - 5k) + 1\,200 \cdot 2k = 55\,000 + 100k$. Crece con k, así que el máximo es para $k = 10$: $(x, y, z) = (80, 0, 20)$ con $56\,000$ €.

e. Hace falta $y = 50 - 5k \geq 20$, o sea $k \leq 6$. El mejor es $k = 6$: $(68, 20, 12)$, con beneficio $55\,000 + 600 = 55\,600$ €.