Soluciones del examen - Rectas y planos

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · Duración: 60 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. . Paramétricas: $x = 1 + 2t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$. Continua: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ (1,5 puntos).

b. . Normal:   (1 punto). Plano $-3x - 4y + z + D = 0$ con A: $-3 - 4 + D = 0$, $D = 7$. Es decir, $3x + 4y - z - 7 = 0$ (0,5 puntos). Comprobación con B: $9 + 0 - 2 - 7 = 0$; con C: $0 + 8 - 1 - 7 = 0$.

c. $3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 - (-2) - 7 = -3 + 12 + 2 - 7 = 4 \neq 0$: D no está en el plano, luego no es coplanario. Equivale a comprobar que el producto mixto de  no es nulo: vale $6 - 8 - 2 = -4$. (1 punto)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, -1)$ no son proporcionales: nunca son paralelas ni coincidentes (0,5 puntos).  y  (1,5 puntos). Si $a \neq 0$ se cruzan; si $a = 0$ son secantes (0,5 puntos).

b. Con $a = 0$: $1 + t = \lambda$, $2t = 0$, $1 + t = 2 - \lambda$. De la segunda $t = 0$, luego $\lambda = 1$, y la tercera se cumple: $1 = 1$. Punto $(1, 0, 1)$ (1,5 puntos). Comprobación en s: con $\lambda = 1$, $(0 + 1,\ 0,\ 2 - 1) = (1, 0, 1)$.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Con $y = t$: $x = 1 + t$, $z = 2 - t$. Punto $(1, 0, 2)$ y vector $(1, 1, -1)$ (también $(1, -1, 0) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1)$). Comprobación del punto: $1 - 0 = 1$ y $0 + 2 = 2$.

b. $(1,1,-1)\cdot(1,m,1)=m$. Si $m\neq 0$, la recta corta al plano en un punto. Si $m=0$: el punto $(1,0,2)$ cumple $1+0+2=3\neq 4$, así que r es paralela a π.
c. $(1+t)+t+(2-t)=4$, $3+t=4$, $t=1$. Punto $(2,1,1)$. Comprobación: $2-1=1$, $1+1=2$ y $2+1+1=4$. Se sustituyen las ecuaciones paramétricas en la ecuación del plano. (1 punto)

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

[redacted]

a.

(1 punto). Si $k\neq 0$: rangos 3 y 3, los planos se cortan en un único punto (0,5 puntos). Si $k=0$: $\operatorname{rg} A=2$ y el menor de la ampliada

[redacted] da $\operatorname{rg} A^*=3$: no hay punto común. Las normales $(1,1,1)$, $(1,-1,0)$ y $(3,1,2)$ no son proporcionales dos a dos, luego los planos se cortan dos a dos en rectas paralelas y forman un prisma triangular (1 punto).
b. Con $k=2$: $x+y+z=2$, $x-y+2z=0$, $3x+y+2z=2$. Sumando las dos primeras, $2x+3z=2$; restando la primera de la tercera, $2x+z=0$. Restando estas dos, $2z=2$ y $z=1$; entonces $x=-\frac{1}{2}$ e $y=2-x-z=\frac{3}{2}$. Comprobación en π_2: $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+2=0$. Punto $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right)$ (1,5 puntos).

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. $(x,y,z)=(4t,\ 2t,\ 10-t)$, $t\geq 0$. Cada segundo el dron se desplaza según el vector $(4,2,-1)$ a partir del punto inicial.
b. $-2t+2(10-t)-6=0$, $14-4t=0$, $t=3{,}5$ s. Punto $(14,\ 7,\ 6{,}5)$. Comprobación: $-7+13-6=0$. Se sustituye la trayectoria en la ecuación del plano y se despeja t. (2 puntos)
c. Basta un vector perpendicular a la normal $(0,-1,2)$, por ejemplo $(1,0,0)$ o $(0,2,1)$: como el producto escalar con la normal es 0, la trayectoria es paralela al tejado (la azotea está fuera del tejado: $0+20-6=14\neq 0$). (1 punto)