Apuntes - Rectas y planos

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Actividad de introducción: dos avionetas en el cielo

Desde la torre de control de un aeródromo se observan dos avionetas que vuelan en línea recta. Cada trayectoria se puede describir con un punto de partida y una dirección, igual que una recta. El controlador necesita saber enseguida si las dos trayectorias se cortan, si son paralelas o si se cruzan a distinta altura sin tocarse. En el plano solo había dos posibilidades para dos rectas distintas: cortarse o ser paralelas. En el espacio aparece una tercera, muy frecuente en la vida real: rectas que no se cortan y tampoco son paralelas, como los puentes de una autopista que pasan uno por encima del otro. Piensa antes de empezar: ¿cómo describirías el tejado de una casa con una ecuación? ¿Cómo sabrías si la pata de una mesa toca el suelo en el mismo plano que las otras tres? En este tema aprenderás a escribir las ecuaciones de rectas y planos y a estudiar su posición relativa con rangos y determinantes, la herramienta que ya conoces de los temas de matrices y sistemas.

Ecuaciones de la recta

Definición: ecuaciones de la recta

Una recta r queda determinada por un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un **vector director** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ (o por dos puntos A, B, con). Sus ecuaciones son:

Propiedades: ecuaciones de la recta

- **Vectorial:** $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$.
- **Paramétricas:** $x = x_0 + \lambda u_1,\ y = y_0 + \lambda u_2,\ z = z_0 + \lambda u_3$.
- **Continua:** $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2} = \dfrac{z - z_0}{u_3}$ (si alguna componente es 0, el numerador correspondiente se iguala a 0).
- **Implícitas:** dos ecuaciones de planos, $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$. Su vector director es el producto vectorial de los vectores normales.

Ecuaciones del plano

Definición: ecuaciones del plano

Un plano π queda determinado por un punto P y dos vectores directores $\vec{u}, \vec{v}$ no

paralelos (o por tres puntos no alineados, o por un punto y una recta que no lo contiene).

Propiedades: ecuaciones del plano

- **Vectorial:** $(x, y, z) = P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. **Paramétricas:** una ecuación por coordenada.
- **General o implícita:** $Ax + By + Cz + D = 0$. El vector $\vec{n} = (A, B, C)$ es **normal** (perpendicular) al plano. Se obtiene con $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ y D imponiendo que pasa por P; o bien [redacted].

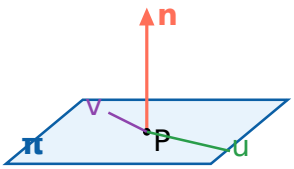


Figura: plano π por P con vectores directores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y vector normal $\vec{n}$.

Ejemplo 1

Plano por $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$. [redacted]. Plano: $6x + 3y + 2z + D = 0$ y con A: $D = -6$. Resulta $6x + 3y + 2z - 6 = 0$, o en forma segmentaria $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

Posición relativa de dos rectas

Definición: posición relativa de dos rectas

Sean $r : (P, \vec{u})$ y $s : (Q, \vec{v})$, y [redacted].

Propiedades: posición relativa de dos rectas

- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales: **paralelas** si $\vec{w}$ no es proporcional a ellos; **coincidentes** si lo es.
- Si $\vec{u}, \vec{v}$ no son proporcionales: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Rightarrow$ **se cortan** en un punto; $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0 \Rightarrow$ **se cruzan** (no están en un mismo plano).

Posición relativa de recta y plano

Definición: posición relativa de recta y plano

Con $r:(P,\vec{u})$ y $\pi: Ax+By+Cz+D=0$: si $\vec{n}\cdot\vec{u}\neq 0$, son **secantes** (se sustituye la recta en el plano y se obtiene el punto). Si $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$, son paralelos si $P\notin\pi$ y la recta **está contenida** si $P\in\pi$.

Posición relativa de dos y tres planos

Definición: posición relativa de dos y tres planos

Dos planos $A_1x+\cdots=0$, $A_2x+\cdots=0$ son secantes si (A_1,B_1,C_1) y (A_2,B_2,C_2) no son proporcionales; paralelos si lo son pero D_1, D_2 no guardan la misma proporción; coincidentes si todo es proporcional. Para tres planos se estudia el sistema de tres ecuaciones con el teorema de Rouché-Frobenius: SCD, un punto; SCI con un parámetro, una recta común; SCI con dos parámetros, planos coincidentes; SI, planos sin punto común (se cortan dos a dos, o hay paralelos).

Ejemplo 2

$r:(1,0,0)+\lambda(1,1,2)$ y $s:(0,1,1)+\mu(2,0,1)$. [redacted] .

[redacted] : se cortan. Igualando: $1+\lambda=2\mu$, $\lambda=1$,

$2\lambda=1+\mu\Rightarrow\lambda=1,\mu=1$. Punto $(2,1,2)$.

Haz de planos

Definición: haz de planos

El conjunto de planos que contienen una recta $r:\{\pi_1=0,\pi_2=0\}$ es el **haz de planos** $\alpha\pi_1+\beta\pi_2=0$. Sirve para hallar el plano que contiene a r y cumple otra condición (pasar por un punto, ser paralelo a una dirección).

Errores frecuentes

¡Atención!

- Confundir el vector normal (A,B,C) con un vector director del plano.
- Olvidar que $(2,4,6)$ y $(1,2,3)$ dan la misma dirección.
- Concluir que dos rectas son paralelas o se cortan sin estudiar si se cruzan.
- Al pasar a implícitas, no comprobar que las dos ecuaciones son independientes.

Más ejemplos resueltos

Ejemplo 3

$r:\ x+y-3=0,\ y+2z-8=0$. Con $z=\lambda$: $y=8-2\lambda$, $x=3-y=-5+2\lambda$. Paramétricas: $x=-5+2\lambda,\ y=8-2\lambda,\ z=\lambda$; vector director $(2,-2,1)$, que coincide con $(1,1,0)\times(0,1,2)=(2,-2,1)$.

Ejemplo 4

$r:(1,0,1)+\lambda(1,2,-1)$ y $\pi: 2x-y+z-4=0$. $\vec{n}\cdot\vec{u}=2-2-1=-1\neq 0$: secantes. Sustituyendo: $2(1+\lambda)-2\lambda+(1-\lambda)-4=0\Rightarrow -1-\lambda=0\Rightarrow\lambda=-1$. Punto de corte: $(0,-2,2)$.

Ejemplo 5

Para $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$: [redacted], es decir,

$x+y+z-1=0$.

Cómo se plantean los problemas de la PAU

Observación

En la prueba de Matemáticas II suele aparecer un problema de geometría con tres o cuatro apartados encadenados: (a) estudiar la posición relativa de dos rectas o de una recta y un plano, normalmente con un parámetro; (b) hallar el plano que contiene a una recta y a un punto, o que pasa por tres puntos; (c) calcular el punto de corte; (d) en el tema siguiente, una distancia o un ángulo. La estrategia es siempre la misma: identifica los datos (puntos y vectores), calcula un vector normal o director con el producto vectorial y decide con un determinante o un producto escalar.

Un consejo práctico: antes de escribir ecuaciones, haz un dibujo rápido a mano alzada con los puntos y las rectas. Ayuda a prever si el resultado debe ser un punto, una recta o la ausencia de solución, y permite detectar errores de signo. Cuando halles una ecuación de un plano, comprueba siempre que pasa por todos los puntos dados: es la verificación más rápida y la que más puntos salva.

Método: posición relativa de dos rectas

1. Escribe punto y director de cada recta y [redacted].

2. Si $\vec{u} \parallel \vec{v}$: paralelas o coincidentes según $\vec{w}$.
3. Si no: calcula $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$; cero, se cortan; distinto de cero, se cruzan.
4. Si se cortan, iguala coordenadas para hallar el punto.

Rectas y planos en la vida real

Propiedad: cómo se elige la ecuación más útil

Las distintas ecuaciones de una recta dicen lo mismo, pero cada una sirve para una cosa. Las paramétricas son las mejores para calcular puntos y para cortar con un plano, porque basta sustituir y despejar el parámetro. La continua permite leer de un vistazo un punto y el vector director. Las implícitas, como intersección de dos planos, son las adecuadas cuando la recta aparece al resolver un sistema o cuando hay que formar un haz de planos. Con los planos ocurre algo parecido: la ecuación general muestra el vector normal, mientras que la ecuación segmentaria muestra los puntos de corte con los ejes y facilita dibujarlo.

Método: posición relativa de una recta y un plano

1. Toma un punto P y un vector director $\vec{u}$ de la recta y el vector normal $\vec{n}$ del plano.
2. Calcula $\vec{u} \cdot \vec{n}$. Si no es cero, la recta corta al plano en un único punto.
3. Para hallar ese punto, sustituye las paramétricas de la recta en la ecuación del plano y despeja el parámetro.
4. Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, la recta es paralela al plano o está contenida en él: sustituye el punto P en el plano.
5. Si P cumple la ecuación, la recta está contenida; si no, es paralela.

Ejemplo 6

Un foco láser en $(0, 0, 3)$ emite en la dirección $(2, 1, -1)$. ¿Dónde alcanza la pared $x + 2y = 8$?

Las paramétricas del rayo son $x = 2t$, $y = t$, $z = 3 - t$. Al sustituir en la pared queda $2t + 2t = 8$, es decir, $t = 2$, y el punto de impacto es $(4, 2, 1)$. El producto escalar entre el vector director y la normal vale $2 + 2 = 4$, distinto de cero, lo que confirma que el rayo no es paralelo a la pared.

Ejemplo 7

¿Cojea una mesa cuyas patas acaban en $(0, 0, 0)$, $(120, 0, 1)$, $(120, 80, 0)$ y $(0, 80, 1)$ (centímetros)?

Cuatro puntos son coplanarios si el producto mixto de los tres vectores que salen de uno de ellos vale cero. Con los vectores $(120, 0, 1)$, $(120, 80, 0)$ y $(0, 80, 1)$ el determinante, desarrollado por la primera fila, vale $120 \cdot 80 + 1 \cdot 9\,600 = 19\,200$,

distinto de cero, así que la mesa cojea. Para que no cojeara, la cuarta pata debería acabar en $(0, 80, -1)$.

¡Atención!

Un error frecuente es decir que dos rectas son paralelas solo porque no se cortan: en el espacio pueden cruzarse. Antes de concluir hay que comparar los vectores directores. Otro error es tomar el vector normal de un plano como si fuera un vector contenido en él: el vector (A, B, C) de la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ es perpendicular al plano. También es habitual olvidar que el parámetro de una recta y el de otra son distintos: al buscar el punto de corte de dos rectas hay que usar letras distintas, por ejemplo t y λ.

Las posiciones de tres planos

Propiedad: tres planos y el teorema de Rouché-Frobenius

Tres planos forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Si los rangos de la matriz de coeficientes y de la ampliada valen 3, se cortan en un punto. Si los dos rangos valen 2, los tres planos comparten una recta: forman un haz, o dos coinciden y el tercero los corta. Si los dos valen 1, los tres planos coinciden. Si el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada es 3, no hay punto común: o dos planos son paralelos y el tercero los corta, o los tres se cortan dos a dos en rectas paralelas, como las caras de un prisma triangular. Para distinguir estos dos casos se comparan los vectores normales de dos en dos.

Ejemplo 8

Estudia los planos $x + y + z = 1$, $x + 2y + 3z = 2$ y $2x + 3y + 4z = 3$.

El determinante de los coeficientes es cero y la tercera ecuación es la suma de las dos primeras, incluido el término independiente. Los dos rangos valen 2 y los tres planos pasan por la misma recta. Para hallarla se toman las dos primeras ecuaciones y se resuelven con z como parámetro: $y = 1 - 2z$ y $x = z$.

Observación: geometría y ordenadores

Los programas de diseño por ordenador que usan los arquitectos y los ingenieros representan cada pieza con planos y rectas, y calculan miles de intersecciones por segundo con las mismas fórmulas de este tema. Los videojuegos hacen lo mismo para decidir si un rayo de luz, una bala o la mirada de un personaje choca con una pared. El método de las coordenadas fue introducido en el siglo XVII por René Descartes y Pierre de Fermat, y llevarlo a tres dimensiones permitió, siglos después, construir los modelos digitales que hoy se usan para diseñar puentes, edificios y aviones.

El consejo de Otto

Para dos rectas, calcula primero la dirección (¿proporcionales?) y después el determinante $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$. Para recta y plano, solo hace falta un producto escalar: $\vec{n} \cdot \vec{u}$.