Ejercicios - Rectas y planos

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Las ecuaciones de una recta

Una recta del espacio queda determinada por un punto y un vector director. Se considera la recta r que pasa por $A(1, -2, 3)$ con vector director $\vec{u} = (2, 1, -1)$.

a. Escribe sus ecuaciones vectorial y paramétricas.
b. Escribe su ecuación continua.
c. Escribe sus ecuaciones implícitas (como intersección de dos planos).
d. Comprueba si los puntos $B(5, 0, 1)$ y $C(3, -1, 1)$ pertenecen a r.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Recta que pasa por dos puntos

Para escribir la recta que pasa por dos puntos se toma uno de ellos y, como vector director, el vector que los une. Sean $A(2, 0, 1)$ y $B(4, 3, -1)$.

a. Halla un vector director y las ecuaciones paramétricas de la recta AB.
b. Comprueba que A, B y $C(6, 6, -3)$ están alineados.
c. Halla el punto donde la recta corta al plano $z = 0$.
d. Halla el punto donde corta al plano $x = 0$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Plano que pasa por tres puntos

Un plano queda determinado por tres puntos no alineados. Sean $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 3)$, los puntos donde el plano corta a los ejes.

a. Calcula , y un vector normal al plano.

b. Escribe la ecuación general del plano.
c. Escribe su ecuación segmentaria y explica qué significan sus denominadores.
d. Comprueba si $P(1, 2, -3)$ y $Q(1, 1, 1)$ pertenecen al plano.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Planos definidos por una recta

Se considera la recta $r:\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.

a. Halla el plano perpendicular a r que pasa por $P(2,-1,3)$.
b. Halla el plano que contiene a r y pasa por $Q(0,1,2)$.
c. Halla el plano paralelo a $\pi:\ 2x-y+4z=1$ que pasa por el origen.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Posición relativa de dos rectas

Para estudiar dos rectas r (punto P, vector $\vec{u}$) y s (punto Q, vector $\vec{v}$) se comparan el rango de $\{\vec{u},\vec{v}\}$ y el de [illegible]. Sean $r:\ (x,y,z)=(1,2,0)+t(1,-1,2)$, $s:\ (x,y,z)=(0,1,3)+\lambda(2,1,-1)$ y $s':\ (x,y,z)=(0,1,0)+\mu(1,0,1)$.

a. Estudia la posición relativa de r y s.
b. Estudia la posición relativa de r y s'.
c. Si se cortan, halla el punto de corte.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Recta y plano con parámetro

Se consideran la recta $r:\ x=1+2t,\ y=-t,\ z=3+t$ y el plano $\pi:\ x+ay+z=5$.

a. Calcula el producto escalar del vector director de r por el vector normal de π.
b. ¿Para qué valor de a es r paralela a π? ¿Puede estar contenida?
c. Para $a=1$, halla el punto de corte.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Tres planos con parámetro

Se consideran los planos $\pi_1:\ x+y+z=1$, $\pi_2:\ x+2y+mz=2$ y $\pi_3:\ 2x+3y+4z=m$.

a. Calcula el determinante de la matriz de coeficientes.
b. Estudia la posición relativa de los tres planos según m.
c. Para $m=2$, halla el punto común.
d. Para $m=3$, halla la recta común.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Dos avionetas sobre la Mancha

La torre de control de un aeródromo de Albacete sigue dos avionetas. Con coordenadas en kilómetros y el tiempo t en minutos, la avioneta A ocupa la posición

$(4t,\ 3t,\ 9)$ y la avioneta B, la posición $(8,\ 3t,\ 9)$.

a. Escribe las trayectorias como rectas y estudia su posición relativa.
b. Halla el punto donde se cortan las trayectorias.
c. ¿Llegan las dos a ese punto en el mismo instante? ¿Qué debe hacer la torre?
d. La torre ordena a B volar a 10 km de altura: $(8,\ 3t,\ 10)$. Estudia de nuevo la posición relativa.
e. Calcula la velocidad de cada avioneta en km/h.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – El láser del concierto

En un concierto en Valencia, un foco láser situado en $L(0,0,3)$ emite un rayo en la dirección $\vec{u} = (2,1,-1)$. La pared del fondo del escenario es el plano $\pi:\ x + 2y = 8$ (unidades en metros).

a. Escribe las ecuaciones paramétricas del rayo.
b. Halla el punto donde el rayo alcanza la pared.
c. Si el rayo no encontrara la pared, ¿en qué punto llegaría al suelo $z = 0$?
d. ¿Pasa el rayo por la cabeza de la cantante, situada en $(2;\ 1;\ 1{,}8)$? ¿Y por el micrófono, en $(2,1,2)$?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – El tejado de la casa

Un arquitecto de Lugo diseña un tejado plano inclinado que pasa por los puntos $A(0,0,3)$, $B(8,0,3)$ y $C(0,4,5)$, en metros.

a. Halla la ecuación del plano del tejado.
b. La chimenea sale del tejado en el punto de coordenadas $x = 5$, $y = 2$. ¿A qué altura está?
c. Una antena tiene la punta en $(3;\ 1;\ 3{,}6)$. ¿Está por encima o por debajo del tejado?
d. Calcula la inclinación del tejado respecto del suelo.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El teleférico

Un teleférico de los Pirineos une la estación base $A(0,0,500)$ con la estación de montaña $B(600,800,1300)$, en metros (el eje z es la altitud). Se supone que el cable es recto.

a. Escribe las ecuaciones paramétricas del cable con $t \in [0,1]$.
b. Calcula la longitud del cable.
c. ¿En qué punto la cabina está a 1 000 m de altitud?
d. En el punto del suelo $(150,200)$ hay un abeto cuya copa está a 690 m de altitud.

¿A qué distancia vertical pasa la cabina por encima?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – La mesa que cojea

Una mesa de cocina tiene cuatro patas. Con el centímetro como unidad, los extremos de las patas están en $A(0,0,0)$, $B(120,0,1)$, $C(120,80,0)$ y $D(0,80,1)$. Una mesa no cojea si los cuatro extremos son coplanarios.

a. Halla la ecuación del plano que pasa por A, B y C.
b. ¿Está D en ese plano? ¿Cojea la mesa?
c. ¿Qué tercera coordenada debería tener D para que no cojeara?
d. Comprueba el resultado con el producto mixto de , y .

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – La buhardilla y el haz de planos

Las dos caras del tejado de una buhardilla son los planos $\pi_1:\ x+z=6$ y $\pi_2:\ y+z=6$ (metros). Se instalará una lámina de vidrio plana que contenga la arista común de los dos planos y pase por el punto $L(1,2,3)$.

a. Halla la recta r (arista) en que se cortan los dos planos.
b. Escribe la ecuación del haz de planos que contienen a r.
c. Halla el plano de la lámina de vidrio.
d. Comprueba que contiene a r.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Las tuberías de la fábrica

En una fábrica de Tarragona, dos tuberías rectas siguen las rectas $r:\ (1,0,2)+t(1,1,0)$ y $s:\ (0,a,0)+\mu(0,1,1)$, en metros. Para soldarlas hace falta que se corten.

a. Estudia la posición relativa de r y s según el valor de a.
b. ¿Para qué valor de a se pueden soldar?
c. Halla el punto de soldadura en ese caso.
d. ¿Pueden ser paralelas para algún valor de a? Razona.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: la sombra de la farola

En una plaza de Córdoba hay una farola vertical de 4 m cuya base está en $(2,3,0)$ y cuya punta está en $(2,3,4)$. Una tarde, los rayos del Sol llegan con la dirección

$\vec{s} = (1, 2, -2)$. Detrás de la farola hay una pared vertical, el plano $x = 3$. Se quiere saber dónde cae la sombra de la farola, que en parte se apoya en el suelo y en parte sube por la pared. Unidades: metros.

a. Escribe la recta del rayo de sol que pasa por la punta de la farola.
b. Si no hubiera pared, ¿dónde caería la sombra de la punta en el suelo $z = 0$? ¿Cuánto mediría la sombra?
c. Halla el punto donde ese rayo alcanza la pared $x = 3$.
d. La sombra en el suelo sale de la base en la dirección $(1, 2, 0)$. ¿Dónde llega a la pared?
e. Describe la sombra completa y calcula su longitud total.
f. ¿Por qué la sombra en el suelo tiene la dirección $(1, 2, 0)$? Justifícalo.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: el cable de la carpa

Para montar una carpa de fiestas se tensa un cable recto desde el anclaje $P(0, 0, 1)$. El cable debe tocar dos barras rectas de la estructura: $r: \ (1, 0, 0) + t(0, 1, 0)$ y $s: \ (0, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$ (metros). Este es un problema clásico de la PAU: la recta pedida es la intersección de dos planos.

a. Halla el plano α que contiene a r y pasa por P.
b. Halla el plano β que contiene a s y pasa por P.
c. Halla la recta del cable como intersección de α y β.
d. Halla los puntos donde el cable toca cada barra.
e. Comprueba que el cable no es paralelo a ninguna de las barras. ¿Por qué es importante?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: el invernadero

Una cooperativa de El Ejido construye un invernadero. El techo es un plano que contiene la viga recta $r: \ (0, 0, 3) + t(1, 0, 0)$, situada a 3 m de altura, y sube en la dirección del vector $\vec{w} = (0, 4, 3)$. El techo es un rectángulo de 10 m a lo largo de la viga y 5 m en la dirección de $\vec{w}$. Los paneles de plástico cuestan 8,50 € el metro cuadrado.

Elemento	Dato
Viga inferior	(0, 0, 3) + t (1, 0, 0)
Dirección de subida	(0, 4, 3)
Dimensiones	10 m × 5 m
Precio del panel	8,50 €/m²

a. Halla la ecuación del plano del techo.
b. Comprueba que el punto $C(5, 4, 6)$ está en el techo y explica qué representa.

c. Calcula el área del techo y el coste de los paneles.
d. Calcula la inclinación del techo respecto del suelo.
e. ¿A qué altura está el borde superior del techo?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: el plano mediador de dos antenas

Dos antenas de telefonía móvil están en $A(2,1,0)$ y $B(6,5,4)$ (kilómetros). Un teléfono se conecta a la antena más cercana. Los puntos que están a la misma distancia de las dos antenas forman un plano, llamado plano mediador del segmento AB.

a. Halla el punto medio M de AB.
b. Explica por qué el plano mediador es perpendicular a AB y pasa por M, y halla su ecuación.
c. Un excursionista está en $C(1,2,3)$. ¿A qué antena se conecta? Compruébalo con las distancias.
d. Halla la recta en que el plano mediador corta al suelo $z=0$.
e. Comprueba con un punto P cualquiera del plano que $|PA| = |PB|$.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: recta contenida en un plano

Se consideran la recta $r:\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{a} = \dfrac{z}{-1}$ y el plano $\pi:\ x+2y+bz=c$. Este tipo de ejercicio aparece con frecuencia en la PAU: se trata de decidir para qué valores de los parámetros la recta corta al plano, es paralela o está contenida en él.

a. Indica un punto y un vector director de r y un vector normal de π.
b. Escribe la condición para que r sea paralela a π o esté contenida en él.
c. ¿Qué condición debe cumplir c para que r esté contenida en π?
d. Halla b y c para que r esté contenida en π cuando $a=1$.
e. Para $a=1$, $b=0$ y $c=3$, halla el punto de corte.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: tres planos y todas sus posiciones

Para ir más allá. Se consideran $\pi_1:\ ax+y+z=1$, $\pi_2:\ x+ay+z=1$ y $\pi_3:\ x+y+az=1$.

a. Calcula el determinante de los coeficientes y factorízalo.
b. Para $a\neq 1$ y $a\neq -2$, halla el punto común (pista: suma las tres ecuaciones).
c. ¿Qué ocurre si $a=1$?
d. ¿Qué ocurre si $a=-2$? Describe la figura que forman los planos.