Soluciones - Rectas y planos

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. Vectorial: $(x, y, z) = (1, -2, 3) + t(2, 1, -1)$. Paramétricas: $x = 1 + 2t$, $y = -2 + t$, $z = 3 - t$.

b. Se despeja t en cada paramétrica: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$.

c. De la primera igualdad, $x - 1 = 2(y + 2)$, es decir, $x - 2y - 5 = 0$. De la segunda, $-(y + 2) = z - 3$, es decir, $y + z - 1 = 0$. Implícitas: $\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

d. B: $x = 5$ da $t = 2$, y entonces $y = 0$ y $z = 1$: coincide, $B \in r$. C: $x = 3$ da $t = 1$, que obliga a $y = -1$ y $z = 2 \neq 1$: $C \notin r$.

Solución del ejercicio 2

a.  . Paramétricas: $x = 2 + 2t$, $y = 3t$, $z = 1 - 2t$.

b.  : los vectores son proporcionales, luego los tres puntos están alineados (C corresponde a $t = 2$).

c. $z = 0$: $1 - 2t = 0$, $t = \frac{1}{2}$. Punto $\left(3, \frac{3}{2}, 0\right)$.

d. $x = 0$: $2 + 2t = 0$, $t = -1$. Punto $(0, -3, 3)$.

Solución del ejercicio 3

a.  , .

 .

b. $6x + 3y + 2z + D = 0$ con A: $6 + D = 0$, $D = -6$. Plano: $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

c. Dividiendo entre 6: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. Los denominadores son los puntos de corte con los ejes X, Y y Z.

d. P: $6 + 6 - 6 - 6 = 0$, pertenece. Q: $6 + 3 + 2 - 6 = 5 \neq 0$, no pertenece.

Solución del ejercicio 4

a. El vector director de r, $(3, -2, 1)$, es normal al plano: $3x - 2y + z + D = 0$. Con P:

$6 + 2 + 3 + D = 0$, $D = -11$. Plano $3x - 2y + z - 11 = 0$.

b. r pasa por $A(1, 0, -1)$. El plano contiene los vectores $(3, -2, 1)$ y .

Normal: $(3, -2, 1) \times (-1, 1, 3) = (-6 - 1,\ -1 - 9,\ 3 - 2) = (-7, -10, 1)$. Plano $-7x - 10y + z + D = 0$ con A: $-7 - 1 + D = 0$, $D = 8$. Es decir, $7x + 10y - z - 8 = 0$. Comprobación con Q: $0 + 10 - 2 - 8 = 0$.

c. Los planos paralelos tienen el mismo vector normal: $2x - y + 4z + D = 0$; por el origen, $D = 0$. Plano $2x - y + 4z = 0$.

Solución del ejercicio 5

a. $\vec{u} = (1, -1, 2)$ y $\vec{v} = (2, 1, -1)$ no son proporcionales: rango 2.  y  : rango 3. Las rectas se cruzan.

b. $\vec{u} = (1, -1, 2)$ y $(1, 0, 1)$ no son proporcionales.   y  : rango 2. Son secantes.

c. Se igualan: $1 + t = \mu$, $2 - t = 1$, $2t = \mu$. De la segunda, $t = 1$; entonces $\mu = 2$ y la primera se cumple. Punto de corte $(2, 1, 2)$.

Solución del ejercicio 6

a. $(2, -1, 1) \cdot (1, a, 1) = 2 - a + 1 = 3 - a$.

b. Si $3 - a \neq 0$ la recta corta al plano. Si $a = 3$, la recta es paralela o está contenida; se mira el punto $(1, 0, 3)$ de r: $1 + 0 + 3 = 4 \neq 5$, así que es paralela y nunca está contenida.

c. Con $a = 1$: $(1 + 2t) - t + (3 + t) = 5$, es decir, $4 + 2t = 5$ y $t = \frac{1}{2}$. Punto $\left(2, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Comprobación: $2 - \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 5$.

Solución del ejercicio 7

a.  .

b. Si $m \neq 3$: rangos 3 y 3, los planos se cortan en un punto. Si $m = 3$: π_3 es la suma de π_1 y π_2 (también $1 + 2 = 3$), rangos 2 y 2: los tres planos pasan por una misma recta (haz de planos).

c. Con $m = 2$: restando π_1 de π_2, $y + z = 1$; restando $2\pi_1$ de π_3, $y + 2z = 0$. Así $z = -1$, $y = 2$, $x = 0$. Punto $(0, 2, -1)$.
d. Con $m = 3$: $x + y + z = 1$ y $y + 2z = 1$. Con $z = t$: $y = 1 - 2t$, $x = 1 - y - z = t$. Recta $(t,\ 1 - 2t,\ t)$.

Solución del ejercicio 8

a. A: punto $(0, 0, 9)$, vector $(4, 3, 0)$. B: punto $(8, 0, 9)$, vector $(0, 3, 0)$. Los vectores no son proporcionales y [redacted] : son secantes.

b. $4t = 8$ da $t = 2$ en A, y entonces $y = 6$; en B, $3s = 6$, $s = 2$. Punto $(8, 6, 9)$.
c. Sí: las dos llegan en el minuto 2, así que chocarían. La torre debe cambiar la altura o el rumbo de una de ellas.
d. Ahora B pasa por $(8, 0, 10)$ y [redacted] : [redacted] . Las trayectorias se cruzan: ya no hay punto común.
e. A recorre $|(4, 3, 0)| = 5$ km por minuto: 300 km/h. B recorre 3 km por minuto: 180 km/h.

Solución del ejercicio 9

a. $x = 2t$, $y = t$, $z = 3 - t$, con $t \geq 0$.
b. $2t + 2t = 8$, $t = 2$. Punto $(4, 2, 1)$.
c. $3 - t = 0$, $t = 3$: punto $(6, 3, 0)$. Pero antes ($t = 2$) choca con la pared.
d. Para $x = 2$ es $t = 1$, que da $y = 1$ y $z = 2$. El rayo pasa por el micrófono $(2, 1, 2)$ y por encima de la cabeza de la cantante, 20 cm más alto.

Solución del ejercicio 10

a. [redacted] , [redacted] . Normal: $(0 \cdot 2 - 0 \cdot 4,\ 0 \cdot 0 - 8 \cdot 2,\ 8 \cdot 4 - 0) = (0, -16, 32)$, proporcional a $(0, -1, 2)$. Plano $-y + 2z + D = 0$ con A: $6 + D = 0$. Tejado: $-y + 2z - 6 = 0$, es decir, $z = 3 + \frac{y}{2}$.
b. $z = 3 + \frac{2}{2} = 4$ m.
c. Para $y = 1$ el tejado está a $z = 3{,}5$ m. La punta, a 3,6 m, queda 10 cm por encima.
d. Ángulo entre la normal $(0, -1, 2)$ y la vertical $(0, 0, 1)$: $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}8944$, $\alpha \approx 26{,}6°$.

Solución del ejercicio 11

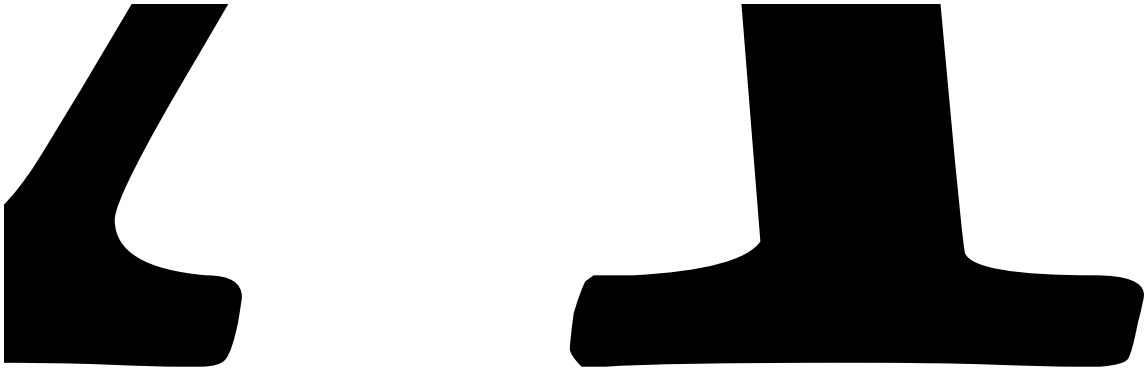
a. $x = 600t$, $y = 800t$, $z = 500 + 800t$, $0 \leq t \leq 1$.

b. [redacted] m.

c. $500 + 800t = 1\,000$, $t = \frac{5}{8}$: punto $(375, 500, 1\,000)$.

d. $x = 150$ da $t = \frac{1}{4}$, y entonces $y = 200$ y $z = 700$. La cabina pasa 10 m por encima de la copa.

Solución del ejercicio 12



a.

, proporcional a $(-2, 3, 240)$. Plano: $-2x + 3y + 240z = 0$.

b. D: $0 + 240 + 240 = 480 \neq 0$. No está en el plano: la mesa cojea.

c. $0 + 240 + 240z = 0$, $z = -1$: la pata debería llegar a $(0, 80, -1)$, 2 cm más abajo.

d. Con $D(0, 80, -1)$: [redacted] .

Coplanarios.

Solución del ejercicio 13

a. Con $z = t$: $x = 6 - t$, $y = 6 - t$. Arista: $(6 - t,\ 6 - t,\ t)$, que pasa por $(6, 6, 0)$ con vector $(-1, -1, 1)$.
b. $x + z - 6 + \lambda(y + z - 6) = 0$, con λ real (más el plano π_2).
c. Con L: $1 + 3 - 6 + \lambda(2 + 3 - 6) = 0$, $-2 - \lambda = 0$, $\lambda = -2$. Plano: $x + z - 6 - 2y - 2z + 12 = 0$, es decir, $x - 2y - z + 6 = 0$.
d. Cualquier punto de r: $(6 - t) - 2(6 - t) - t + 6 = 6 - t - 12 + 2t - t + 6 = 0$. Se cumple para todo t.

Solución del ejercicio 14

a. $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, 1)$ no son proporcionales. [redacted] y [redacted] .

b. Se cortan si el determinante es 0: $a = -3$. Para $a \neq -3$ se cruzan.
c. Con $a = -3$: $1 + t = 0$, $t = -1$, punto de r: $(0, -1, 2)$. En s: $(0,\ -3 + \mu,\ \mu)$ con $\mu = 2$ da $(0, -1, 2)$. Punto de soldadura $(0, -1, 2)$.
d. No: los vectores directores no son proporcionales para ningún a, así que nunca son paralelas.

Solución del ejercicio 15

a. $(2, 3, 4) + t(1, 2, -2)$: $x = 2 + t$, $y = 3 + 2t$, $z = 4 - 2t$.
b. $4 - 2t = 0$, $t = 2$: punto $(4, 7, 0)$. Mediría $|(2, 4, 0)| = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ m.
c. $2 + t = 3$, $t = 1$: punto $(3, 5, 2)$, que está a 2 m de altura sobre la pared.
d. $(2, 3, 0) + \mu(1, 2, 0)$ con $x = 3$: $\mu = 1$, punto $(3, 5, 0)$.
e. Un tramo en el suelo de $(2, 3, 0)$ a $(3, 5, 0)$, de $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ m, y un tramo vertical en la pared de $(3, 5, 0)$ a $(3, 5, 2)$, de 2 m. Total $\approx 4{,}24$ m.
f. Los rayos que pasan por los puntos de la farola forman un plano que contiene la farola (vertical) y la dirección $\vec{s}$. Su intersección con el suelo es una recta que pasa por la base; su dirección es la proyección horizontal de $\vec{s}$, es decir, $(1, 2, 0)$.

Solución del ejercicio 16

a. Vectores  y $(0,1,0)$. Normal

$(1,0,-1)\times(0,1,0)=(0\cdot 0-(-1)\cdot 1,\ -1\cdot 0-1\cdot 0,\ 1\cdot 1-0)=(1,0,1)$.
$\alpha:\ x+z-1=0$.

b. Vectores y $(1,0,1)$. Normal

$(1\cdot 1-(-1)\cdot 0,\ -1\cdot 1-0\cdot 1,\ 0-1)=(1,-1,-1)$. $\beta:\ x-y-z+1=0$ (pasa por P: $0-0-1+1=0$).

c. Dirección $(1,0,1)\times(1,-1,-1)=(1,2,-1)$. Cable: $(t,\ 2t,\ 1-t)$.

d. Con r ($x=1$, $z=0$): $t=1$, punto $(1,2,0)$. Con s ($y=1$, $x=z$): $2t=1$, $t=\frac{1}{2}$, punto $\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$, que está en s con $\mu=\frac{1}{2}$.

e. $(1,2,-1)$ no es proporcional ni a $(0,1,0)$ ni a $(1,0,1)$. Si fuera paralelo a una barra, estaría en un plano paralelo a ella y no podría tocarla.

Solución del ejercicio 17

a. Normal: $(1,0,0)\times(0,4,3)=(0\cdot 3-0\cdot 4,\ 0\cdot 0-1\cdot 3,\ 1\cdot 4-0)=(0,-3,4)$. Plano $-3y+4z+D=0$ con $(0,0,3)$: $D=-12$. Techo: $-3y+4z-12=0$.

b. $-12+24-12=0$: está en el techo. Es $(5,0,3)+(0,4,3)$: el punto medio del borde superior, a 5 m de la viga en la dirección de subida.

c. $|\vec{w}|=5$, así que el techo es un rectángulo de $10\times 5=50$ m². Coste: $50\cdot 8{,}5=425$ €.

d. $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ (normal frente a la vertical), $\alpha\approx 36{,}9^\circ$.

e. Sube 3 m desde la viga: el borde superior está a $3+3=6$ m.

Solución del ejercicio 18

a. $M=\left(\frac{2+6}{2},\frac{1+5}{2},\frac{0+4}{2}\right)=(4,3,2)$.

b. Si $|PA|=|PB|$, el triángulo PAB es isósceles y la mediana PM es perpendicular a AB. Normal : $x+y+z+D=0$ con M: $D=-9$. Plano $x+y+z=9$.

c. $1+2+3=6$: C está del lado de A ($2+1+0=3$). Distancias: $|CA|^2=1+1+9=11$ y $|CB|^2=25+9+1=35$. Se conecta a A.

d. $z=0$: $x+y=9$. Recta $(t,\ 9-t,\ 0)$.

e. Con $P(9,0,0)$: $|PA|^2=49+1+0=50$ y $|PB|^2=9+25+16=50$. Iguales.

Solución del ejercicio 19

a. Punto $P(1,-1,0)$, vector $\vec{u}=(2,a,-1)$, normal $\vec{n}=(1,2,b)$.
b. $\vec{u}\cdot\vec{n}=2+2a-b=0$, es decir, $b=2+2a$.
c. Además P debe estar en el plano: $1-2+0=c$, $c=-1$.
d. $b=2+2=4$ y $c=-1$: $\pi:\ x+2y+4z=-1$.
e. $\vec{u}\cdot\vec{n}=2+2-0=4\neq 0$: se cortan. Con $x=1+2t$, $y=-1+t$, $z=-t$: $1+2t-2+2t=3$, $4t=4$, $t=1$. Punto $(3,0,-1)$. Comprobación: $3+0=3$.

Solución del ejercicio 20

a. [redacted] .

b. Sumando: $(a+2)(x+y+z)=3$, luego $x+y+z=\frac{3}{a+2}$. Restando las ecuaciones dos a dos, $(a-1)(x-y)=0$ y $(a-1)(y-z)=0$, así que $x=y=z=\frac{1}{a+2}$.
c. Los tres planos son $x+y+z=1$: coinciden (rangos 1 y 1).
d. Al sumar sale $0=3$: incompatible. El rango de A es 2 y el de A^* es 3. Las normales $(-2,1,1)$, $(1,-2,1)$ y $(1,1,-2)$ no son proporcionales dos a dos, así que no hay planos paralelos: se cortan dos a dos en tres rectas paralelas y forman un prisma triangular.