Apuntes - Probabilidad

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Actividad de introducción: ¿qué significa un positivo?

Imagina que te haces una prueba médica que acierta en el 95 % de los casos y da positivo. ¿Qué probabilidad hay de que tengas la enfermedad? Casi todo el mundo responde que un 95 %, pero si la enfermedad es rara la respuesta correcta puede ser menos de un 30 %. La razón es que, entre muchísimas personas sanas, el 5 % de errores produce más positivos falsos que positivos verdaderos entre los pocos enfermos. Para no equivocarse con este tipo de preguntas hace falta distinguir entre dos probabilidades condicionadas que parecen iguales y no lo son: la probabilidad de dar positivo si se está enfermo y la de estar enfermo si se ha dado positivo. En este tema repasarás los sucesos y la regla de Laplace, y aprenderás a usar tablas de contingencia, diagramas de árbol, el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes, que se usa en medicina, en los filtros de correo y en la inteligencia artificial.

Sucesos y probabilidad

Definición: probabilidad (axiomas de Kolmogórov)

Una probabilidad asigna a cada suceso A un número $P(A)$ tal que $P(A) \geq 0$, $P(\Omega) = 1$ y, si $A \cap B = \varnothing$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. En el modelo de **Laplace** (casos equiprobables) $P(A) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$.

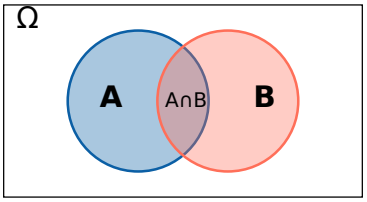


Figura: diagrama de Venn de dos sucesos A y B con su intersección.

Propiedades

- .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Leyes de De Morgan: , .
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Probabilidad condicionada e independencia

Definición: probabilidad condicionada

La probabilidad de A sabiendo que ha ocurrido B (con $P(B) > 0$) es $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. De aquí, el **teorema del producto**: $P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B)$.

Definición: sucesos independientes

A y B son **independientes** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, o equivalentemente $P(A|B) = P(A)$. Si A y B son independientes, también lo son A y . No confundas independientes con incompatibles: si A y B son incompatibles y de probabilidad no nula, son dependientes.

Ejemplo 1

En una urna hay 5 bolas rojas y 3 azules. Se extraen dos sin reposición. $P(\text{ambas rojas}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$. Con reposición serían independientes: $\left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$.

Teorema de la probabilidad total y de Bayes

Teorema de la probabilidad total

Si $A_1, \ldots, A_n$ forman un sistema completo de sucesos (incompatibles, con unión Ω y $P(A_i) > 0$), para cualquier suceso B: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B|A_i)$.

Teorema de Bayes

$P(A_j|B) = \dfrac{P(A_j)\,P(B|A_j)}{\sum_i P(A_i)\,P(B|A_i)}$. Permite invertir una probabilidad condicionada: pasar de «causa → efecto» a «efecto → causa».

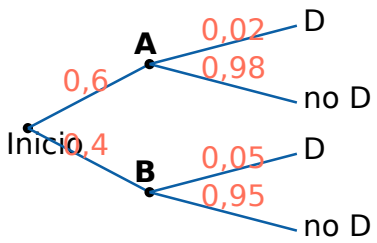


Figura: diagrama de árbol. Se multiplica a lo largo de cada camino y se suma entre caminos.

Método: problema con total y Bayes

1. Define los sucesos (causas A_i y efecto B).
2. Dibuja el árbol con las probabilidades de cada rama.
3. Multiplica a lo largo de los caminos que llevan a B y suma: probabilidad total.
4. Para Bayes, divide el camino de la causa pedida entre la probabilidad total.

Ejemplo 2

Dos máquinas fabrican el 60 % y el 40 % de las piezas, con un 2 % y un 5 % de defectuosas. $P(D) = 0{,}6 \cdot 0{,}02 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}032$. Una pieza defectuosa procede de A con probabilidad $P(A|D) = \dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}02}{0{,}032} = \dfrac{0{,}012}{0{,}032} = 0{,}375$.

Ejemplo 3

De 200 alumnos, 120 son chicas, 80 practican deporte y 50 son chicas deportistas. $P(\text{chica}|\text{deporte}) = \frac{50}{80} = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

¡Atención!

- Confundir $P(A|B)$ con $P(B|A)$ (la falacia del fiscal).
- Creer que incompatibles implica independientes.
- Sumar en lugar de multiplicar a lo largo de una rama del árbol.
- Olvidar que sin reposición cambian las probabilidades de la segunda extracción.

Cómo se plantean estos problemas en la PAU

Observación

La probabilidad es un bloque fijo de la prueba. El problema típico describe una situación con dos o tres causas (máquinas, urnas, grupos de población), da las probabilidades de un efecto en cada causa y pide una probabilidad total y una de Bayes. Con pocos datos, la tabla de contingencia o el diagrama de árbol evitan errores. Conviene dar los resultados como fracción o con tres o cuatro decimales (coma decimal) y comprobar que son coherentes: la probabilidad total debe estar entre las probabilidades condicionadas, y las probabilidades a posteriori deben sumar 1.

Ejemplo 4

Una enfermedad afecta al 1 % de la población. Un test da positivo en el 95 % de los enfermos y en el 4 % de los sanos. $P(+) = 0{,}01 \cdot 0{,}95 + 0{,}99 \cdot 0{,}04 = 0{,}0491$. $P(\text{enfermo}|+) = \frac{0{,}0095}{0{,}0491} \approx 0{,}193$. Aunque el test es bastante fiable, solo uno de cada cinco positivos está enfermo, porque la enfermedad es rara.

Método: probabilidad total y Bayes

1. Dibuja el diagrama de árbol con las probabilidades de cada rama.
2. Multiplica a lo largo de cada camino.
3. Suma los caminos que llevan al suceso: probabilidad total.
4. Para Bayes, divide el camino buscado entre la probabilidad total.

Herramientas para organizar los datos

Método: tabla de contingencia o diagrama de árbol

1. Si el enunciado da recuentos o porcentajes cruzados de dos características (curso y red social, sexo y deporte), organiza los datos en una tabla de contingencia con totales por filas y columnas.
2. Para una probabilidad condicionada con tabla, restringe el total a la fila o la columna de la condición y divide.
3. Si el experimento ocurre en etapas (primero se elige una urna o una máquina y después se observa un resultado), dibuja un diagrama de árbol con las probabilidades de cada rama.
4. Multiplica a lo largo de cada camino y suma los caminos que llevan al suceso buscado: es la probabilidad total.
5. Para Bayes, divide la probabilidad del camino que interesa entre la probabilidad total.

Ejemplo 5

Una fábrica tiene tres máquinas que producen el 50 %, el 30 % y el 20 % de los tornillos, con el 1 %, el 2 % y el 3 % de defectuosos. Si un tornillo es defectuoso, ¿de qué máquina es más probable que venga?

La probabilidad total de defectuoso es $0{,}005 + 0{,}006 + 0{,}006 = 0{,}017$. Al aplicar Bayes, cada máquina tiene una probabilidad proporcional a su camino: la primera, $\frac{5}{17}$; la segunda y la tercera, $\frac{6}{17}$ cada una. Aunque la primera fabrica la mitad de los tornillos, es la que menos defectuosos aporta en proporción a su peso.

¡Atención!

No confundas sucesos incompatibles con sucesos independientes: los incompatibles no pueden ocurrir a la vez y, si tienen probabilidad positiva, son siempre dependientes, porque si ocurre uno el otro ya no puede ocurrir. Tampoco confundas $P(A \mid B)$ con $P(B \mid A)$: la probabilidad de aprobar sabiendo que eres de Artes no es la probabilidad de ser de Artes sabiendo que has aprobado. Y cuando aparezca la expresión «al menos uno», casi siempre es más rápido calcular el complementario, «ninguno», y restar de 1.

Independencia y experimentos repetidos

Propiedad: probabilidades en experimentos independientes

Si varios experimentos son independientes, la probabilidad de que ocurran a la vez varios resultados es el producto de sus probabilidades. Así se calcula la probabilidad de marcar tres penaltis seguidos o de que funcionen dos componentes de un circuito en serie. Para un circuito en paralelo, en cambio, conviene pensar en el complementario: el circuito falla solo si fallan todos sus componentes. Por eso los sistemas críticos, como los frenos de un tren o los ordenadores de un avión, se duplican o triplican: con componentes en paralelo la probabilidad de fallo total se hace muy pequeña.

Ejemplo 6

¿Cuál es la probabilidad de que en una clase de 25 alumnos dos celebren el cumpleaños el mismo día?

Es más fácil calcular la probabilidad de que todos los cumpleaños sean distintos: el segundo alumno debe evitar un día, el tercero dos, y así sucesivamente, lo que da un producto de 25 fracciones que vale aproximadamente 0,43. La probabilidad de que al menos dos coincidan es, por tanto, cerca de 0,57. Es un resultado sorprendente que muestra lo poco fiable que es la intuición con las probabilidades.

Observación: piensa en mil personas

Cuando un problema de Bayes te parezca confuso, imagina un grupo de 1 000 personas y reparte las cantidades en lugar de las probabilidades. En el test de diagnóstico, de 1 000 personas hay 20 enfermas, de las que 19 dan positivo, y 980 sanas, de las que 49 dan positivo. En total hay 68 positivos y solo 19 son de enfermos: la probabilidad de estar enfermo si das positivo es 19 entre 68, unos 0,28. Este método de las frecuencias naturales da exactamente el mismo resultado que la fórmula de Bayes, pero se entiende mucho mejor y es el que usan muchos médicos para explicar los resultados a sus pacientes.

Observación: un poco de historia

El cálculo de probabilidades nació en el siglo XVII de las cartas que se escribieron Blaise Pascal y Pierre de Fermat sobre cómo repartir el dinero de una partida interrumpida. Thomas Bayes, un pastor protestante inglés, demostró su teorema en el siglo XVIII, aunque se publicó después de su muerte. Andréi Kolmogórov dio en 1933 los axiomas que se usan hoy. Actualmente el teorema de Bayes está detrás de los diagnósticos médicos, de los filtros de correo no deseado y de muchos programas de aprendizaje automático.

El consejo de Otto

Ante un problema de probabilidad, dibuja el árbol aunque no te lo pidan. Te dice qué multiplicar, qué sumar y dónde está la pregunta de Bayes.