Soluciones - Probabilidad

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

Primero se escriben el espacio muestral y los sucesos como conjuntos de resultados. La unión reúne los resultados de los dos sucesos, la intersección solo los comunes y el contrario los que faltan; las probabilidades se calculan con la regla de Laplace porque el dado es regular.

a. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{5, 6\}$.
b. $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{6\}$, .
c. $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, .
d. $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$. Se cumple: el 6 se contaría dos veces si no se restara.

Solución del ejercicio 2

Se aplican las propiedades de la probabilidad: la fórmula de la unión, las leyes de De Morgan para los complementarios y la definición de probabilidad condicionada. Para estudiar la independencia se compara la probabilidad de la intersección con el producto.

a. $0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7$.
b. $: 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
c. $P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$.
d. $P(A \mid B) = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5$ y $P(B \mid A) = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$.
e. $P(A)P(B) = 0{,}2 = P(A \cap B)$: sí, son independientes (también $P(A \mid B) = P(A)$).

Solución del ejercicio 3

Todas las cartas tienen la misma probabilidad, así que se usa la regla de Laplace contando casos favorables. En la unión hay que restar las cartas que son a la vez oros y figuras para no contarlas dos veces.

a. Hay 10 oros: $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.
b. Hay $4 \cdot 3 = 12$ figuras: $\frac{12}{40} = \frac{3}{10}$.
c. Hay 3 figuras de oros: $\frac{10+12-3}{40} = \frac{19}{40}$.
d. Es el complementario: $1 - \frac{19}{40} = \frac{21}{40}$.

Solución del ejercicio 4

En una tabla de contingencia, una probabilidad condicionada se calcula restringiendo el total a la fila o columna de la condición. Para la independencia se compara la

probabilidad condicionada con la probabilidad sin condición.

a. $\frac{18+10}{60} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15} \approx 0{,}47$.
b. Se restringe a las 30 chicas: $\frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.
c. Se restringe a los 28 que practican deporte: $\frac{18}{28} = \frac{9}{14} \approx 0{,}64$.
d. $P(\text{deporte} \mid \text{chica}) = 0{,}6 \neq P(\text{deporte}) \approx 0{,}47$: no son independientes.

Solución del ejercicio 5

Para sucesos independientes la probabilidad de la intersección es el producto. Con ella se calcula la unión con la fórmula general, y el complementario de la unión da la probabilidad de que no ocurra ninguno.

a. $P(A \cap B) = 0{,}18$; $P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}18 = 0{,}72$.
b. $1 - 0{,}72 = 0{,}28$ y . Coinciden.
c. No: si son incompatibles, $P(A \cap B) = 0$, pero $P(A)P(B) > 0$. Saber que ocurre uno asegura que el otro no ocurre.

Solución del ejercicio 6

Sin reemplazamiento la composición de la urna cambia después de la primera extracción, así que se multiplica por una probabilidad condicionada. Con reemplazamiento las dos extracciones son independientes y se multiplican las probabilidades iniciales.

a. $P(R_1)P(R_2 \mid R_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0{,}36$.
b. Roja y azul o azul y roja: $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \approx 0{,}54$.
c. $\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64} \approx 0{,}39$.
d. Sin reemplazamiento, la segunda extracción depende de la primera (quedan 7 bolas); con reemplazamiento las extracciones son independientes.

Solución del ejercicio 7

El experimento tiene dos etapas, la moneda y la extracción, y se representa con un diagrama de árbol. La probabilidad total suma los caminos que acaban en bola blanca, y Bayes divide el camino de la urna I entre ese total.

a. Primer nivel: urna I y urna II, con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada una. Segundo nivel: blanca $\frac{3}{5}$ y negra $\frac{2}{5}$ en la I; blanca $\frac{1}{4}$ y negra $\frac{3}{4}$ en la II.
b. Probabilidad total: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{10} + \frac{1}{8} = \frac{17}{40} = 0{,}425$.
c. Bayes: $\dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{17}{40}} = \dfrac{12/40}{17/40} = \frac{12}{17} \approx 0{,}71$.

Solución del ejercicio 8

Los datos ya están organizados en una tabla de contingencia. Las probabilidades conjuntas se leen en las casillas interiores divididas entre el total, y las condicionadas dividiendo entre el total de la fila de la condición.

a. $\frac{60+50}{200} = \frac{110}{200} = 0{,}55$.
b. $\frac{40}{200} = 0{,}2$.
c. $\frac{50}{100} = 0{,}5$.
d. $P(A \mid 2.^{\circ}) = 0{,}5 \neq P(A) = 0{,}55$: no son independientes, aunque la diferencia es pequeña.

Solución del ejercicio 9

Se dibuja un árbol con las tres máquinas en el primer nivel y defectuoso o correcto en el segundo. La probabilidad de defectuoso es la suma de los tres caminos, y Bayes da la probabilidad de cada máquina sabiendo que la pieza es defectuosa.

a. Ramas A (0,5), B (0,3), C (0,2); en cada una, defectuoso (0,01; 0,02; 0,03) o correcto.
b. $0{,}5 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}005 + 0{,}006 + 0{,}006 = 0{,}017$.
c. $\frac{0{,}006}{0{,}017} = \frac{6}{17} \approx 0{,}35$.
d. $P(A \mid D) = \frac{5}{17} \approx 0{,}29$ y $P(B \mid D) = \frac{6}{17}$, igual que la C: B y C empatan como las más probables.

Solución del ejercicio 10

Se construye un árbol con enfermo o sano y, después, test positivo o negativo. La probabilidad de positivo se obtiene con la probabilidad total, y la de estar enfermo tras un positivo, con el teorema de Bayes.

a. $0{,}02 \cdot 0{,}95 + 0{,}98 \cdot 0{,}05 = 0{,}019 + 0{,}049 = 0{,}068$.
b. $\frac{0{,}019}{0{,}068} \approx 0{,}279$: solo un 28 %.
c. $P(-) = 0{,}932$; $\frac{0{,}98 \cdot 0{,}95}{0{,}932} = \frac{0{,}931}{0{,}932} \approx 0{,}9989$.
d. Como la enfermedad es rara, los falsos positivos de los muchos sanos superan a los verdaderos positivos. El médico repetiría el test o pediría otra prueba.

Solución del ejercicio 11

Se plantea un árbol con el tiempo atmosférico en la primera etapa y la puntualidad en la segunda. La probabilidad total da la puntualidad, Bayes da la probabilidad de mal tiempo tras un retraso, y para dos viajes independientes se multiplica.

a. $0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}95 = 0{,}21 + 0{,}665 = 0{,}875$.
b. $P(\text{retraso}) = 0{,}125$; $\frac{0{,}3 \cdot 0{,}3}{0{,}125} = \frac{0{,}09}{0{,}125} = 0{,}72$.

c. $0{,}875^2 \approx 0{,}7656$.

Solución del ejercicio 12

Los lanzamientos son independientes, así que la probabilidad de una secuencia es el producto de probabilidades. Para «al menos uno» se usa el complementario, y para «exactamente uno» se cuentan las posiciones posibles del fallo.

a. $0{,}8^3 = 0{,}512$.
b. $0{,}2^3 = 0{,}008$.
c. Complementario de no marcar ninguno: $1 - 0{,}008 = 0{,}992$.
d. Hay tres posiciones para el fallo: $3 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}384$.

Solución del ejercicio 13

Las tiradas son independientes y la probabilidad de no sacar un cinco en una tirada es cinco sextos. Para «al menos un cinco» se usa el complementario, y el número de tiradas necesario se obtiene resolviendo una inecuación con logaritmos.

a. $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 0{,}579$.
b. $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0{,}421$.
c. $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}9$, $\left(\frac{5}{6}\right)^n$, $n > \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln(5/6)} \approx 12{,}6$: 13 tiradas.

Solución del ejercicio 14

Es un problema de Bayes: el primer nivel del árbol es el tipo de correo y el segundo si contiene la palabra o no. La probabilidad total da la frecuencia de la palabra y Bayes la probabilidad de que el correo sea no deseado.

a. $0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}05 = 0{,}24 + 0{,}03 = 0{,}27$.
b. $\frac{0{,}24}{0{,}27} = \frac{8}{9} \approx 0{,}89$.
c. El 5 % de los correos normales, que son el $\frac{0{,}03}{0{,}27} \approx 11\ \%$ de los que van a la carpeta.

Solución del ejercicio 15

Con una tabla de contingencia completa, las probabilidades simples se leen en los totales, las conjuntas en las casillas y las condicionadas dividiendo entre el total de la condición. Comparar condicionadas con simples permite estudiar la independencia.

a. $\frac{30+50}{400} = \frac{80}{400} = 0{,}2$.
b. $\frac{40}{400} = 0{,}1$.
c. Hay $90 + 40 = 130$ en autobús: $\frac{90}{130} = \frac{9}{13} \approx 0{,}69$.

d. $\frac{50}{150} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$, mayor que 0,2.
e. No son independientes: en bachillerato se usa mucho más la bici. Un carril bici útil para los mayores podría animar también a los de ESO.

Solución del ejercicio 16

Se dibuja el árbol con las tres modalidades y el resultado de la prueba. La probabilidad total suma los tres caminos de aprobado; para cada pregunta de Bayes se divide el camino que interesa entre la probabilidad total correspondiente.

a. Ramas C (0,45), H (0,35), A (0,20); en cada una, aprobar (0,95; 0,90; 0,85) o suspender (0,05; 0,10; 0,15).
b. $0{,}45 \cdot 0{,}95 + 0{,}35 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}85 = 0{,}4275 + 0{,}315 + 0{,}17 = 0{,}9125$.
c. $\frac{0{,}17}{0{,}9125} \approx 0{,}186$.
d. $P(S) = 0{,}0875$. $P(C \mid S) = \frac{0{,}0225}{0{,}0875} \approx 0{,}257$, $P(H \mid S) = \frac{0{,}035}{0{,}0875} = 0{,}4$, $P(A \mid S) = \frac{0{,}03}{0{,}0875} \approx 0{,}343$. La más probable es Humanidades y Ciencias Sociales.
e. La primera (0,85) es la proporción de aprobados entre los de Artes; la segunda (0,186) es la proporción de alumnos de Artes entre los aprobados. Son preguntas distintas.

Solución del ejercicio 17

En serie el circuito funciona si funcionan todos los componentes, y se multiplican las probabilidades. En paralelo basta que funcione uno, así que se calcula el complementario: el circuito falla solo si fallan todos.

a. $0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$.
b. Falla solo si fallan los dos: $1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.
c. En paralelo (0,98 frente a 0,72): un fallo no detiene la instalación.
d. $1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$.
e. $1 - 0{,}1^n > 0{,}9999$, $0{,}1^n$: $n = 5$ componentes.

Solución del ejercicio 18

Es más sencillo calcular la probabilidad del suceso contrario, que todos los cumpleaños sean distintos. Cada nuevo alumno debe evitar los días ya ocupados, lo que da un producto de fracciones cada vez menores.

a. $\frac{1}{365} \approx 0{,}0027$.
b. $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{341}{365} \approx 0{,}431$.
c. $1 - 0{,}431 \approx 0{,}569$: más del 56 %.
d. Sí: no se compara un cumpleaños con los demás, sino todas las parejas posibles, que son $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$.

Solución del ejercicio 19

Hay que tener en cuenta que el presentador no abre una puerta al azar: sabe dónde está el coche. Se calcula con Bayes la probabilidad de cada posición del coche sabiendo qué puerta ha abierto el presentador.

a. $\frac{1}{3}$: su elección inicial no cambia por lo que haga después el presentador.
b. $P(\text{abre } 3 \mid C_1) = \frac{1}{2}$, $P(\text{abre } 3 \mid C_2) = 1$, $P(\text{abre } 3 \mid C_3) = 0$. Total: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. $P(C_2 \mid \text{abre } 3) = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.
c. Sí: cambiando gana con probabilidad $\frac{2}{3}$, el doble que sin cambiar.
d. Si el coche está en la 1 (prob. $\frac{1}{3}$), cambiar hace perder; si está en la 2 o la 3 (prob. $\frac{2}{3}$), el presentador abre la otra vacía y cambiar hace ganar.

Solución del ejercicio 20

La fórmula de la unión de tres sucesos se justifica contando cuántas veces se suma cada zona del diagrama de Venn. Para las alarmas independientes, las intersecciones se calculan como productos, y el complementario permite comprobar el resultado.

a. Al sumar las tres probabilidades, las zonas comunes a dos sucesos se cuentan dos veces y la común a los tres, tres veces. Al restar las intersecciones dobles, la zona triple queda contada 0 veces, por eso se suma al final.
b. $0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}72 - 0{,}63 - 0{,}56 + 0{,}504 = 0{,}994$.
c. $1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$. Coincide.

d.

.