Soluciones del examen - Matrices

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · Duración: 60 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ y $B^t = B$. Entonces $2A - B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. B es simétrica: al trasponerla no cambia. (1 punto)

b. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Son distintas: no conmutan. Por ejemplo, el elemento (1,1) de AB es $1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$ y el de BA es $0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 3$. Multiplicar por B a la derecha intercambia las columnas de A; a la izquierda, sus filas. (1,5 puntos)

c. $AC = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 4 \\ -1 & 12 & 10 \end{pmatrix}$. CA no existe porque C tiene 3 columnas y A tiene 2 filas. A es 2×2 y C es 2×3, así que AC es 2×3; su primer elemento es $1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -1$. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

Se calcula $|A| = 1 \cdot (m-1) - 1 \cdot (1-m) + m \cdot (1-m^2)$ que, tras simplificar, da $|A| = -(m-1)^2(m+2)$ (1,5 puntos).

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, el rango es 3 (0,5 puntos).

Si $m = 1$, las tres filas son $(1,1,1)$: rango 1 (1 punto).

Si $m = -2$, el determinante es 0 y el menor [redacted] : rango 2 (1 punto).

Comprobación para $m = 0$: la fórmula da $-(0-1)^2(0+2) = -2$, igual que el cálculo directo, $1 \cdot (0-1) - 1 \cdot (1-0) + 0 = -2$; rango 3.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

Se parte de $(A|I)$. Con $F_3 - F_1$ se obtiene $(0,1,-2|-1,0,1)$ en la tercera fila; con $F_3 - F_2$ queda $(0,0,-3|-1,-1,1)$ (1,5 puntos).

Se divide la tercera fila entre -3 y se eliminan los elementos superiores. Resulta

(1,5 puntos).

Comprobación: (1 punto).

Otra comprobación parcial: la tercera fila de A, $(1,1,0)$, por la primera columna de A^{-1} da $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+0=0$.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

Se saca factor común: $X(A-I)=B$ (1 punto).

$A-I=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ tiene determinante $-1\neq 0$ y $(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ (1 punto).

$X=B(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ (1 punto).

Comprobación: $XA-X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=B$ (1 punto).

No se puede dividir entre una matriz: como X está a la izquierda, se multiplica por $(A-I)^{-1}$ por la derecha.

Por ejemplo, la primera fila de X es $(1,2)\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=(2,-1)$.

Error frecuente: escribir $X(A-1)$; a una matriz no se le resta un número, hay que usar la identidad I.

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. Cada columna recoge todo el destino de los clientes de una operadora: se quedan o se van, y los porcentajes suman el 100 %. (0,5 puntos)

b. $v_1=Tv_0=\begin{pmatrix}49600\\ 30400\end{pmatrix}$ y $v_2=Tv_1=\begin{pmatrix}49280\\ 30720\end{pmatrix}$ (Se redondean a clientes enteros.) (1,5 puntos)

c. De $Tw=w$: $-0{,}08w_X+0{,}12w_Y=0$, luego $w_X=1{,}5w_Y$. Con $w_X+w_Y=80\,000$: $2{,}5w_Y=80\,000$, $w_Y=32\,000$ y $w_X=48\,000$. (1,5 puntos)

d. A largo plazo X se estabiliza en 48 000 clientes (pierde 2 000) e Y en 32 000 (gana 2 000). (0,5 puntos)