Apuntes - Matrices

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Actividad de introducción: la tabla de la cafetería

En la cafetería del instituto se anotan en una tabla los bocadillos, los zumos y los cafés vendidos cada día de la semana. Para saber cuánto dinero se ha ingresado, cada día hay que multiplicar las unidades de cada producto por su precio y sumar. Si repites esa operación para los cinco días, acabas de hacer, sin saberlo, el producto de una matriz de ventas por un vector de precios. Prueba con estos datos: el lunes se venden 30 bocadillos, 20 zumos y 10 cafés; el martes, 25, 30 y 15. Con precios de 2 €, 1,50 € y 1 €, ¿cuánto ingresa la cafetería cada día? Calcula también cuál de los dos días ha sido mejor. En este tema aprenderás a organizar datos así en matrices, a operar con ellas y a usarlas para resolver sistemas, calcular inversas y estudiar el rango, herramientas que aparecen en el primer problema de álgebra de la PAU de Matemáticas II.

Qué es una matriz

Definición: qué es una matriz

Una **matriz** de dimensión $m \times n$ es una tabla de números con m filas y n columnas. El elemento a_{ij} ocupa la fila i y la columna j. Tipos habituales: **cuadrada** ($m = n$), **fila** o **columna**, **diagonal** (solo hay elementos distintos de cero en la diagonal principal), **identidad** I (diagonal de unos), **nula**, **triangular**, **simétrica** ($A^t = A$) y **antisimétrica** ($A^t = -A$).

Operaciones

Propiedades: operaciones

- **Suma y resta:** solo entre matrices de la misma dimensión, elemento a elemento. La suma es conmutativa y asociativa.
- **Producto por un número:** se multiplica cada elemento. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
- **Traspuesta** A^t: se intercambian filas y columnas. $(A + B)^t = A^t + B^t$ y $(AB)^t = B^t A^t$.
- **Producto de matrices:** $A \cdot B$ existe si el número de columnas de A coincide con el de filas de B. Si A es $m \times n$ y B es $n \times p$, el resultado es $m \times p$ y su elemento c_{ij} es la fila i de A por la columna j de B.

El producto es **asociativo** y **distributivo**, pero **no es conmutativo**: en general $AB \neq BA$. Además, $AB = 0$ no implica $A = 0$ ni $B = 0$, y $AB = AC$ no permite simplificar A. Se cumple $AI = IA = A$.

Ejemplo 1

Con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 \\ 0\cdot 3 - 1\cdot 1 & 0\cdot 0 - 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $AB \neq BA$, las matrices no conmutan.

Potencias y ecuaciones matriciales

Definición: potencias y ecuaciones matriciales

$A^n = A \cdot A \cdots A$ solo tiene sentido si A es cuadrada. Para calcular A^n en general se calculan $A^2, A^3, \ldots$, se detecta la pauta y se demuestra por inducción. Para despejar una matriz se multiplican ambos miembros **por el mismo lado**: si $AX = B$ y A tiene inversa, $X = A^{-1}B$; si $XA = B$, $X = BA^{-1}$.

Ejemplo 2

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y se deduce que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rango de una matriz

Definición: rango de una matriz

El **rango** es el número máximo de filas (o columnas) linealmente independientes. Se calcula por el **método de Gauss**: con operaciones elementales entre filas (cambiar dos filas, multiplicar una fila por un número no nulo, sumar a una fila un múltiplo de otra) se llega a una matriz escalonada; el rango es el número de filas no nulas.

Ejemplo 3

Para $\begin{vmatrix} \\ \\ \\ \end{vmatrix}$: $F_2 - 2F_1 = (0,0,0)$ y $F_3 - F_1 = (0,-2,-2)$. Quedan dos filas no nulas, luego el rango es 2.

Matriz inversa

Definición: matriz inversa

Una matriz cuadrada A es **invertible** (o regular) si existe A^{-1} con $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. La inversa, si existe, es única. Es invertible si y solo si su rango es máximo (equivalentemente, si su determinante es distinto de cero, como veremos en el tema siguiente). Propiedades: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Método de Gauss-Jordan. Se escribe $(A \mid I)$ y se aplican operaciones elementales por filas hasta obtener $(I \mid A^{-1})$.

Ejemplo 4

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$: $(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Con $F_2 - 3F_1$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Con $-F_2$ y luego $F_1 - 2F_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Así $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Errores frecuentes

¡Atención!

- Multiplicar elemento a elemento en lugar de fila por columna.
- Suponer $AB = BA$ y desarrollar $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; lo correcto es $A^2 + AB + BA + B^2$.
- Despejar X multiplicando por la inversa por el lado equivocado.
- Olvidar comprobar las dimensiones antes de multiplicar.

Más ejemplos resueltos

Ejemplo 5

Resuelve $AX + B = C$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Paso 1: $AX = C - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Paso 2: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Paso 3: $X = A^{-1}(C-B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 6

Estudia el rango de según a. Se calcula el determinante:

$|A| = -(a-1)^2(a+2)$. Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, el rango es 3. Si $a = 1$, las tres filas son iguales y el rango es 1. Si $a = -2$, el determinante es nulo y las dos primeras filas son independientes: el rango es 2.

Ejemplo 7

Una tienda vende dos productos en tres sucursales. La matriz $V = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ recoge las unidades vendidas (filas: productos; columnas: sucursales) y el vector fila $p = (3,\ 5)$ los precios en euros. Los ingresos por sucursal se obtienen con $pV = (3 \cdot 10 + 5 \cdot 5,\ 3 \cdot 20 + 5 \cdot 8,\ 3 \cdot 15 + 5 \cdot 12) = (55,\ 100,\ 105)$. El producto de matrices resume en una sola operación muchos cálculos.

Cómo se plantean los problemas de la PAU

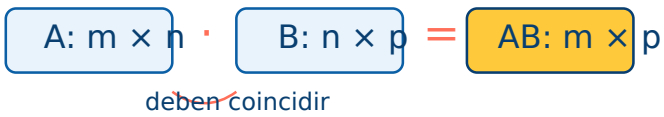
Observación

En Matemáticas II la parte de álgebra suele pedir: (a) calcular una potencia A^n o A^{2026} a partir de una pauta; (b) resolver una ecuación matricial como $AX + 2B = C$ o $XA = A + X$ (agrupa los términos con X y saca factor común por el lado correcto: $X(A - I) = A$); (c) discutir el rango o la existencia de inversa según un parámetro. Escribe siempre cada paso, porque la nota premia el planteamiento aunque haya un error numérico.

Método: ecuación matricial y matriz inversa

1. Comprueba que las dimensiones permiten operar.
2. Agrupa los términos con X en un miembro y saca factor común por el lado correcto.
3. Calcula A^{-1} por Gauss-Jordan: $(A|I) \to (I|A^{-1})$.
4. Multiplica por A^{-1} por el mismo lado en ambos miembros y comprueba el resultado.

Cómo se resuelve una ecuación matricial paso a paso



Método: despejar la matriz incógnita

1. Escribe las dimensiones de todas las matrices y comprueba que las operaciones tienen sentido.
2. Pasa al otro miembro los sumandos que no contienen a X y agrupa los términos con X en un solo miembro.
3. Saca factor común a X por el lado en que está: si X está a la derecha, el factor común va a la izquierda del paréntesis, y al revés.
4. Comprueba que la matriz que multiplica a X es invertible (rango máximo o

determinante distinto de cero).
5. Multiplica los dos miembros por la inversa, por el mismo lado, y simplifica con $A^{-1}A = I$.
6. Verifica la solución sustituyéndola en la ecuación original.

Ejemplo 8

Resuelve $AX = B + 2X$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Se pasa $2X$ al primer miembro: $AX - 2X = B$. Como $2X = 2IX$, se saca factor común por la izquierda: $(A - 2I)X = B$. Aquí $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con determinante -1, luego es invertible y su inversa es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces $X = (A - 2I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Para comprobar, calculamos AX y $B + 2X$ y vemos que coinciden. Fíjate en que hemos tenido cuidado con el lado: X queda a la derecha de $(A - 2I)$, y por eso la inversa se coloca a la izquierda de B.

Matrices en la vida real y en la PAU

Propiedad: cómo se interpreta el producto

Si las filas de A representan elementos (tiendas, ciudades, productos) y las columnas de A representan características (precio, población, ingredientes), el producto AB combina la información de A con la de B siempre que las características de A coincidan con los elementos de B. Por eso el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al de filas de la segunda. Esta lectura permite comprobar si un producto tiene sentido sin hacer ningún cálculo.

Ejemplo 9

En una empresa de reparto, la matriz $T = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ indica la proporción de paquetes que cada mes pasan de un centro a otro. Si hoy hay 100 paquetes en el primer centro y 200 en el segundo, ¿cuántos habrá el mes que viene?

El vector de paquetes es $v = (100, 200)^t$. El mes siguiente se obtiene con Tv. El primer centro tendrá $0{,}7 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot 200 = 110$ paquetes y el segundo $0{,}3 \cdot 100 + 0{,}8 \cdot 200 = 190$. El total se conserva (300 paquetes), cosa que siempre ocurre cuando cada columna de la matriz suma 1. Para saber cuántos habrá dentro de dos meses basta multiplicar de nuevo por T, o calcular T^2v.

Observación: estrategia en el examen

El ejercicio de matrices de la PAU suele tener tres apartados que se encadenan: primero una propiedad o un cálculo de potencias, después una ecuación matricial y finalmente la discusión de un parámetro. Si no sabes resolver un apartado, usa su enunciado como dato en el siguiente: los tribunales puntúan el planteamiento correcto aunque el resultado anterior no lo hayas obtenido. Escribe siempre las operaciones intermedias, deja señalado el resultado final y, si te sobra tiempo, comprueba que cada inversa que hayas calculado cumple $AA^{-1} = I$. Esa comprobación de dos líneas evita muchos errores de signo.

Propiedad: invertibilidad y rango

Para una matriz cuadrada A de orden n son equivalentes: A es invertible; el rango de A es n; las filas (o las columnas) de A son linealmente independientes; y $|A| \neq 0$. Si alguna de ellas falla, fallan todas. Esto permite elegir el camino más cómodo según el problema: el determinante cuando hay parámetros y Gauss-Jordan cuando la matriz es numérica y quieres la inversa completa.

¿Sabías que?

La palabra matriz la introdujo el matemático inglés James Joseph Sylvester en 1850, y fue su amigo Arthur Cayley quien desarrolló el álgebra de matrices pocos años después. Hoy las matrices son la base de la informática gráfica: cada vez que giras o amplías una imagen en el móvil, el aparato multiplica las coordenadas de los puntos por una matriz. También las usan los buscadores para ordenar páginas web y los equipos deportivos para analizar las pasadas entre jugadores.

El consejo de Otto

Antes de multiplicar, escribe las dimensiones: $(m \times n)(n \times p)$. Si los números del centro no coinciden, no hay producto. Y comprueba siempre tu inversa multiplicando AA^{-1}: debe salir I.