Ejercicios - Matrices

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Dimensión y elementos de una matriz

Una matriz de dimensión $m \times n$ tiene m filas y n columnas, y a_{ij} es el elemento de la fila i y la columna j. Considera $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = (a_{ij})$ de dimensión 3×3 con $a_{ij} = i - 2j$.

a. Indica la dimensión de A y los elementos a_{13} y a_{24}.
b. Escribe la traspuesta A^t y su dimensión.
c. Escribe la matriz B completa.
d. Indica de qué tipo es cada matriz: ¿cuadrada?, ¿simétrica?, ¿triangular?

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Suma, resta y producto por un número

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calcula $A + B$ y $A - B$.
b. Calcula $3A - 2B$.
c. Halla la matriz X que cumple $2X + A = B$.
d. ¿Se puede sumar A con una matriz de dimensión 2×3? Razona la respuesta.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Producto de matrices

Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y :

a. Escribe la dimensión de AB y de BA antes de calcular nada.
b. Calcula AB.
c. Calcula BA.
d. ¿Son iguales AB y BA? ¿Qué propiedad ilustra el resultado?

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Traspuesta y propiedades

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calcula $(AB)^t$.
b. Calcula $B^t A^t$ y compáralo con el apartado anterior.
c. Calcula $A^t B^t$. ¿Coincide con $(AB)^t$?
d. Calcula $A + A^t$ y $A - A^t$ e indica cuál es simétrica y cuál antisimétrica.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Potencias y pautas

Para calcular una potencia grande se calculan las primeras potencias, se detecta la pauta y se generaliza.

a. Calcula A^2, A^3 y deduce A^n para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
b. Calcula B^n para la matriz diagonal $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
c. Calcula C^2, C^3, C^4 para $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y halla C^{2026}.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Rango por el método de Gauss

El rango de una matriz es el número de filas no nulas de una matriz escalonada equivalente. Se obtiene con operaciones elementales entre filas.

a. Halla el rango de .

b. Halla el rango de .

c. ¿Cuál es el rango máximo posible de una matriz 3×4? ¿Lo alcanza B?

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Matriz inversa por Gauss-Jordan

Una matriz cuadrada A es invertible si existe A^{-1} con $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Se calcula con $(A|I) \to (I|A^{-1})$.

a. Calcula la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y comprueba que $AA^{-1} = I$.

b. Calcula la inversa de .

c. Demuestra que $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ no es invertible.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Ecuaciones matriciales

Para despejar una matriz se multiplica por la inversa, siempre por el mismo lado en los dos miembros.

a. Despeja X en $AX + B = C$.
b. Resuélvela con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
c. Despeja X en $XA = B$ y explica por qué no se puede escribir $X = B/A$.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Ventas en tres tiendas de móviles

Una cadena de tiendas de accesorios tiene sucursales en Madrid, Sevilla y Valencia. La matriz V recoge las unidades vendidas en una semana (filas: fundas y cargadores; columnas: Madrid, Sevilla, Valencia). Los precios son 3 € por funda y 5 € por cargador.

	Madrid	Sevilla	Valencia
Fundas	10	20	15
Cargadores	5	8	12

a. Escribe la matriz V y el vector fila p de precios.
b. Calcula el producto pV e interpreta cada elemento.
c. ¿Cuánto ingresa la cadena en total esa semana?
d. En la semana siguiente las ventas suben un 20 %. Escribe la nueva matriz de ventas como $1{,}2\,V$ y calcula los ingresos de Sevilla.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Recetas de la panadería

Una panadería de Zaragoza elabora pan de pueblo y pan integral. La matriz R da los kilos de harina y de masa madre por pieza (filas: pan de pueblo e integral; columnas: harina y masa madre). La matriz P da las piezas elaboradas en cada turno (filas: mañana y tarde; columnas: pan de pueblo e integral).

	Harina (kg)	Masa madre (kg)
Pan de pueblo	2	1
Pan integral	1	3

a. Con $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, calcula PR.
b. Interpreta el elemento $(PR)_{12}$.
c. El kilo de harina cuesta 1 € y el de masa madre 2 €. Calcula con un producto de matrices el coste de materias primas de cada turno.
d. ¿Tiene sentido interpretar RP? Razónalo.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Migración entre dos ciudades

Cada año el 10 % de los habitantes de la ciudad A se traslada a la ciudad B y el 20 % de los de B se traslada a A. Hoy viven 600 mil personas en A y 400 mil en B (se supone que no hay otros movimientos). La matriz de transición es $T = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ y el vector de población es $v = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

a. Explica el significado de cada columna de T.
b. Calcula la población dentro de un año, $v_1 = Tv_0$.
c. Calcula $v_2 = Tv_1$ y comprueba que $v_2 = T^2 v_0$.
d. Calcula el vector w que cumple $Tw = w$ con $w_A + w_B = 1000$ (reparto estable).

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Líneas de autobús entre tres pueblos

Tres pueblos P_1, P_2, P_3 están unidos por líneas de autobús de sentido único. La matriz G tiene $g_{ij} = 1$ si hay línea directa de P_i a P_j y 0 si no la hay. Se tiene

.

a. Dibuja mentalmente el grafo y enumera las líneas directas.
b. Calcula G^2 e interpreta el elemento $(G^2)_{13}$.
c. Calcula G^3 y halla cuántos caminos de 3 tramos hay de P_2 a P_2.
d. ¿Cuántos viajes con exactamente 1 o 2 tramos permiten ir de P_1 a P_3?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Rango según un parámetro

Se considera la matriz .

a. Calcula el determinante de A_m por la regla de Sarrus y factorízalo.
b. Discute el rango de A_m según los valores de m.
c. Para $m = 3$ halla una relación entre las filas.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Una ecuación con X a los dos lados

En la PAU es habitual que la incógnita aparezca a ambos lados. Se resuelve la ecuación $XA = A + X$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Agrupa los términos con X y saca factor común por la izquierda: ¿qué ecuación queda?
b. Comprueba que $A - I$ es invertible y calcula su inversa.
c. Halla X y comprueba la ecuación.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Matrices que conmutan

Se buscan todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumplen $AX = XA$ para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calcula AX y XA.
b. Iguala elemento a elemento y resuelve el sistema resultante.
c. Escribe la forma general de X y comprueba con un ejemplo numérico.
d. ¿Conmuta A con $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – La inversa sin Gauss

Una matriz cuadrada A cumple la relación $A^2 = A + 2I$.

a. Demuestra que A es invertible y expresa A^{-1} en función de A e I.
b. Comprueba la relación para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
c. Calcula A^{-1} con la fórmula del primer apartado y verifica que $AA^{-1} = I$.
d. Calcula A^3 sin hacer más productos que uno, usando la relación.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Un mensaje cifrado con matrices

Para cifrar se asigna a cada letra un número (A=0, B=1, C=2, ..., N=13, Ñ=14, O=15, ..., Z=26, alfabeto de 27 letras). Las letras se agrupan por parejas, cada pareja es un vector columna v y se envía Kv módulo 27, con la clave $K = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Comprueba que K es invertible y calcula K^{-1} en los números enteros.
b. Cifra la palabra HOLA (H=7, O=15, L=11, A=0).
c. Para descifrar se usa K^{-1} módulo 27. Reduce K^{-1} módulo 27 (suma 27 a los negativos).
d. Descifra el mensaje recibido XVGL y comprueba que se obtiene la palabra original.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: la fábrica de bicicletas

Una fábrica de Eibar produce tres modelos de bicicleta: de paseo (P_1), de montaña (P_2) y eléctrica (P_3). La tabla indica lo que necesita cada unidad. Esta semana dispone de 110 kg de acero, 190 kg de aluminio y 130 horas de trabajo y quiere aprovecharlos por completo. Los beneficios por unidad son 30 €, 45 € y 50 €.

	P1	P2	P3
Acero (kg)	2	1	1
Aluminio (kg)	1	3	2
Trabajo (h)	1	1	2

a. Llama x, y, z al número de bicicletas de cada modelo y escribe el sistema en la forma $MQ = b$ con $Q = (x, y, z)^t$.
b. Calcula $|M|$ y justifica que el sistema tiene solución única.
c. Calcula M^{-1} por Gauss-Jordan o por adjuntos y resuelve el sistema.
d. Calcula el beneficio semanal con un producto de matrices.
e. Si el próximo mes dispone de un 10 % más de todos los recursos, ¿cuántas unidades se fabricarán de cada modelo?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Una matriz que se anula al cuadrado

Sea $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Se dice que una matriz es nilpotente si alguna potencia suya es la matriz nula.

a. Calcula N^2 y deduce N^k para $k \geq 2$.
b. Comprueba que $(I + N)(I - N) = I$ y deduce $(I + N)^{-1}$.

c. Usa que I y N conmutan para demostrar que $(I+N)^n = I + nN$.
d. Calcula $(I+N)^{10}$.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Reto: producto de matrices simétricas

Sean A y B dos matrices cuadradas simétricas. ¿Cuándo es simétrica la matriz AB?

a. Demuestra que $(AB)^t = BA$.
b. Deduce que AB es simétrica si y solo si $AB = BA$.
c. Comprueba con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ que AB no es simétrica.
d. Construye una matriz $C = 2A + 3I$ y comprueba que AC sí es simétrica.