Soluciones - Matrices

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. A tiene 2 filas y 4 columnas: dimensión 2×4. El elemento a_{13} está en la fila 1, columna 3: vale 0. El elemento a_{24} está en la fila 2, columna 4: vale -2.

b. Se intercambian filas y columnas: , de dimensión 4×2.

c. Se aplica $a_{ij} = i - 2j$: $a_{11} = -1$, $a_{12} = -3$, $a_{13} = -5$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = -2$, $a_{23} = -4$, $a_{31} = 1$, $a_{32} = -1$, $a_{33} = -3$. Entonces .

d. A no es cuadrada (tiene 2×4). B es cuadrada, pero no es simétrica, porque $b_{12} = -3 \neq b_{21} = 0$, ni triangular, porque tiene elementos distintos de cero por encima y por debajo de la diagonal.

Solución del ejercicio 2

La suma, la resta y el producto por un número se hacen elemento a elemento, y solo se pueden sumar matrices de la misma dimensión. Para despejar una matriz en una ecuación lineal se opera igual que con números, pasando términos de un miembro a otro.

a. Suma elemento a elemento: $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

b. $3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $2B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Restando: $3A - 2B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$.

c. De $2X = B - A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ se obtiene $X = \frac{1}{2}(B - A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.
Comprobación: $2X + A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$.

d. No. La suma solo está definida entre matrices de la misma dimensión, y 2×2 no coincide con 2×3.

Solución del ejercicio 3

a. A es 2×3 y B es 3×2. Entonces AB es 2×2 y BA es 3×3.

b. Cada elemento es la fila de A por la columna de B:
$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 2$, $c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 7$,

$c_{21} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 4$, $c_{22} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 2$. Así $AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

c. (matriz 3×3).

d. No son iguales, ni siquiera tienen la misma dimensión. Ilustra que el producto de matrices no es conmutativo.

Solución del ejercicio 4

La traspuesta se obtiene cambiando filas por columnas. La propiedad clave es que la traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas en orden inverso, y una matriz es simétrica si coincide con su traspuesta.

a. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, luego $(AB)^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b. $B^t A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Coincide: se cumple $(AB)^t = B^t A^t$.

c. $A^t B^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, que es distinta de $(AB)^t$. El orden de los factores se invierte al trasponer.

d. $A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ es simétrica (igual a su traspuesta). $A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica (su traspuesta es su opuesta).

Solución del ejercicio 5

Para una potencia alta no se multiplica muchas veces: se calculan las primeras potencias, se observa la pauta de los elementos y se generaliza. La fórmula obtenida se puede comprobar con el método de inducción.

a. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La pauta es $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. En una matriz diagonal se elevan los elementos de la diagonal: $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

c. $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$, $C^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. La pauta se repite cada 4 potencias. Como $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, $C^{2026} = C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 6

Para calcular el rango se hacen ceros debajo de la diagonal con operaciones

elementales entre filas, que no cambian el rango. Al terminar, el rango es el número de filas que no son completamente nulas.

a. $F_2 - 2F_1 = (0, 0, 0)$ y $F_3 - F_1 = (0, -2, -2)$. Quedan dos filas no nulas: $\operatorname{rg} A = 2$.
b. $F_2 - 2F_1 = (0, 3, -4, 3)$ y $F_3 - 3F_1 = (0, 3, -4, 3)$. Luego $F_3 - F_2 = (0, 0, 0, 0)$ y quedan dos filas no nulas: $\operatorname{rg} B = 2$.
c. El rango máximo es $\min(3, 4) = 3$. B no lo alcanza, porque su rango es 2 (la tercera fila es combinación de las otras dos).

Solución del ejercicio 7

Se escribe la matriz ampliada con la identidad a la derecha y se aplican operaciones entre filas hasta conseguir la identidad a la izquierda. Lo que queda a la derecha es la inversa, y se comprueba multiplicando.

a. $(A|I)$: con $F_2 - 3F_1$ queda $(1\ 2|1\ 0;\ 0\ -1|-3\ 1)$. Con $-F_2$ y $F_1 - 2F_2$ se llega a $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Comprobación: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Se resta de abajo arriba: $F_2 - F_3$ y $F_1 - F_2$. Resulta .

c. $F_1 - 2F_2 = (0, 0)$: aparece una fila nula, luego $\operatorname{rg} C = 1$ y C no es invertible. (Todas las filas son proporcionales.)

Solución del ejercicio 8

Para despejar la matriz incógnita se pasa el término independiente al otro miembro y se multiplica por la inversa por el mismo lado en ambos miembros. El orden importa, porque el producto de matrices no es conmutativo.

a. $AX = C - B$ y, si A es invertible, $X = A^{-1}(C - B)$.
b. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Comprobación: $AX + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = C$.
c. $X = BA^{-1}$ (por la derecha). No existe la división de matrices porque $A^{-1}B \neq BA^{-1}$ en general, y habría que indicar por qué lado se multiplica.

Solución del ejercicio 9

En los problemas con tablas, cada fila y cada columna tiene un significado. Al multiplicar matrices hay que comprobar que las columnas de la primera coinciden en significado con las filas de la segunda, como unidades por precio.

a. $V = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ y $p = (3\ \ 5)$.

b. $pV = (3 \cdot 10 + 5 \cdot 5,\ 3 \cdot 20 + 5 \cdot 8,\ 3 \cdot 15 + 5 \cdot 12) = (55 \quad 100 \quad 105)$. Son los ingresos en euros de Madrid, Sevilla y Valencia.
c. $55 + 100 + 105 = 260$ €.
d. Los ingresos de Sevilla pasan a $1{,}2 \cdot 100 = 120$ €.

Solución del ejercicio 10

a. Fila de P por columna de R: $PR = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$.
b. $(PR)_{12} = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 17$: kilos de masa madre usados por la mañana.
c. Con $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $PRc = \begin{pmatrix} 48 \\ 49 \end{pmatrix}$: 48 € por la mañana y 49 € por la tarde.
d. Se puede calcular, $RP = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$, pero mezcla columnas de tipos de pan con filas de tipos de pan: no tiene interpretación útil. Es un ejemplo de que $PR \neq RP$.

Solución del ejercicio 11

a. La primera columna recoge el destino de los habitantes de A: 90 % se queda y 10 % va a B. La segunda, el de los habitantes de B: 20 % va a A y 80 % se queda. Cada columna suma 1.
b. $v_1 = \begin{pmatrix} 620 \\ 380 \end{pmatrix}$: 620 mil en A y 380 mil en B.
c. $v_2 = \begin{pmatrix} 634 \\ 366 \end{pmatrix}$ y $T^2 = \begin{pmatrix} \frac{83}{100} & \frac{17}{50} \\ \frac{17}{100} & \frac{33}{50} \end{pmatrix}$ da el mismo resultado: $T^2 v_0 = \begin{pmatrix} 634 \\ 366 \end{pmatrix}$.
d. De $Tw = w$ sale $-0{,}1w_A + 0{,}2w_B = 0$, es decir, $w_A = 2w_B$. Con $w_A + w_B = 1000$: $w_B = \frac{1000}{3}$ y $w_A = \frac{2000}{3}$, unas 667 mil y 333 mil personas.

Solución del ejercicio 12

a. Líneas directas: $P_1 \to P_2$, $P_1 \to P_3$, $P_2 \to P_1$, $P_2 \to P_3$, $P_3 \to P_2$.
b. . El elemento $(G^2)_{13} = 1$ cuenta los caminos de 2 tramos de P_1 a P_3 (por ejemplo $P_1 \to P_2 \to P_3$).
c. . Entre P_2 y P_2 hay $(G^3)_{22} = 1$ caminos de 3 tramos.
d. De 1 tramo: $g_{13} = 1$. De 2 tramos: $(G^2)_{13} = 1$. En total, 2 formas.

Solución del ejercicio 13

Se calcula el determinante en función del parámetro y se buscan los valores que lo anulan. Para los demás valores el rango es máximo; para los valores críticos se busca un menor de orden menor distinto de cero.

a. Por Sarrus:
$|A_m| = 1\cdot 1\cdot 5 + (-1)\cdot m\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot m\cdot 0 - (-1)\cdot 2\cdot 5 = 5 - 3m - 6 + 10 = 9 - 3m$
. Es decir, $|A_m| = 3(3-m)$.

b. Si $m \neq 3$, $|A_m| \neq 0$ y el rango es 3. Si $m = 3$, el determinante es 0 y hay un menor [redacted], así que el rango es 2.

c. Con $m = 3$: $F_3 = F_1 + F_2$, pues $(1,-1,2) + (2,1,3) = (3,0,5)$.

Solución del ejercicio 14

Cuando la incógnita aparece a los dos lados se agrupan los términos con X en el mismo miembro y se saca factor común, respetando el lado por el que multiplica. Después se multiplica por la inversa del factor obtenido.

a. $XA - X = A$, es decir, $X(A - I) = A$.

b. $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con determinante $-1 \neq 0$, luego es invertible y $(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c. Se multiplica por la derecha: $X = A(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Comprobación: $XA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A + X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 15

Se escribe la matriz incógnita con cuatro letras, se calculan los dos productos y se igualan elemento a elemento. Resulta un sistema de ecuaciones cuyas soluciones describen todas las matrices que conmutan.

a. $AX = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ y $XA = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$.

b. Igualando: $a + c = a$, $b + d = a + b$, $c = c$, $d = c + d$. De la primera, $c = 0$; de la segunda, $d = a$. No hay más condiciones.

c. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con a, b cualesquiera. Ejemplo: $a = 2$, $b = 5$: $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $AX = XA = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d. No: tiene $c = 1 \neq 0$. De hecho $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ son distintas.

Solución del ejercicio 16

De la relación dada se despeja la identidad y se saca factor común la matriz. Así aparece un producto igual a la identidad, que demuestra que la matriz es invertible y da directamente su inversa.

a. $A^2 - A = 2I$, luego $A(A - I) = 2I$ y $A \cdot \frac{1}{2}(A - I) = I$. Por tanto $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$.

b. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Coinciden.

c. $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - I\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Comprobación: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

d. $A^3 = A \cdot A^2 = A(A + 2I) = A^2 + 2A = (A + 2I) + 2A = 3A + 2I = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Coincide con el cálculo directo: $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 17

a. $|K| = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 \neq 0$. La inversa es $K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b. Pareja HO: $K \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 22 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 24 \\ 22 \end{pmatrix}$, que son las letras X y V. Pareja LA: $K \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$, letras G y L. El mensaje cifrado es XVGL.

c. Módulo 27, $-2 \equiv 25$ y $-1 \equiv 26$, luego $K^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 25 \\ 26 & 3 \end{pmatrix}$.

d. Pareja XV $= (24, 22)$: $K^{-1} \begin{pmatrix} 24 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 + 550 \\ 624 + 66 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \end{pmatrix}$ (H y O). Pareja GL $= (6, 11)$: $\begin{pmatrix} 6 + 275 \\ 156 + 33 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$ (L y A). Se recupera HOLA.

Solución del ejercicio 18

La matriz de necesidades por modelo se multiplica por el vector de producción para obtener el total de cada recurso. Conviene comprobar que las dimensiones encajan y que las unidades del resultado tienen sentido.

a. , $b = (110, 190, 130)^t$. El sistema es $2x + y + z = 110$,

$x + 3y + 2z = 190$, $x + y + 2z = 130$.

b. $|M| = 2(6 - 2) - 1(2 - 2) + 1(1 - 3) = 8 - 0 - 2 = 6 \neq 0$. El rango es 3 y el sistema es compatible determinado.

c. . Entonces : 20 de paseo, 30 de montaña y 40 eléctricas.

d. Beneficio €.

e. Como el sistema es lineal, $M(1{,}1Q) = 1{,}1b$: se fabrican 22, 33 y 44 unidades.

Solución del ejercicio 19

Se calcula el cuadrado de la matriz y, si es nulo, todas las potencias superiores también lo son. Este resultado permite simplificar potencias de expresiones que contienen esa matriz.

a. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. Por tanto $N^k = N^{k-2}N^2 = 0$ para todo $k \geq 2$.

b. $(I+N)(I-N) = I - N^2 = I$. Luego $(I+N)^{-1} = I - N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

c. Como I y N conmutan, vale el binomio de Newton: $(I+N)^n = I + nN + \binom{n}{2}N^2 + \dots$ y todos los términos con N^2 o superior se anulan. Queda $I + nN$.

d. $(I+N)^{10} = I + 10N = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 20

Se aplica la propiedad de la traspuesta de un producto y la definición de matriz simétrica. Una igualdad entre matrices se demuestra transformando un miembro hasta llegar al otro.

a. $(AB)^t = B^t A^t = BA$, porque $A^t = A$ y $B^t = B$.

b. AB es simétrica cuando $(AB)^t = AB$, es decir, $BA = AB$. Recíprocamente, si conmutan, $(AB)^t = BA = AB$.

c. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. No son iguales, luego AB no es simétrica.

d. $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ es simétrica y $AC = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix} = CA$. Como conmutan, AC es simétrica.