Soluciones del examen - Límites, continuidad y derivadas: repaso

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · Duración: 60 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. $\frac{\infty}{\infty}$ con grados iguales: $\frac{4}{2} = 2$. Se dividen numerador y denominador entre x^3 y queda el cociente de los coeficientes principales. (0,5 puntos)

b. $\frac{0}{0}$: $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x-3}{x+1} \to \dfrac{-2}{2} = -1$. Ambos polinomios se anulan en $x = 1$, así que se factorizan y se simplifica el factor $x - 1$. (1 punto)

c. $\infty - \infty$: con el conjugado, $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} \to \dfrac{2}{2} = 1$. Se multiplica y divide por el conjugado $\sqrt{x^2+2x}+x$; el numerador queda $x^2 + 2x - x^2 = 2x$. Dividiendo entre x, $\frac{2}{\sqrt{1+2/x}+1} \to 1$. (1,25 puntos)

d. 1^∞: $\dfrac{x+2}{x+1} - 1 = \dfrac{1}{x+1}$ y $2x \cdot \dfrac{1}{x+1} \to 2$. El límite es e^2. Se usa $\lim f^g = e^{\lim g(f-1)}$ cuando $f \to 1$ y $g \to \infty$. (1,25 puntos)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. En $x = 3$ el numerador vale 3: $\lim_{x\to 3^-} f = \frac{3}{0^-} = -\infty$ y $\lim_{x\to 3^+} f = +\infty$. Asíntota vertical $x = 3$. El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Cerca de 3 el numerador es positivo y el denominador cambia de signo. (1,5 puntos)

b. $m = \lim \dfrac{x^2-2x}{x^2-3x} = 1$; $n = \lim \left(\dfrac{x^2-2x}{x-3} - x \right) = \lim \dfrac{x}{x-3} = 1$. Asíntota $y = x + 1$. Una oblicua $y = mx + n$ tiene $m = \lim \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim(f(x) - mx)$. También se obtiene dividiendo: $x^2 - 2x = (x-3)(x+1) + 3$. No hay horizontal, porque el grado del numerador es mayor. (1,5 puntos)

c. $f(x) - (x+1) = \dfrac{3}{x-3}$: por encima cuando $x \to +\infty$ y por debajo cuando $x \to -\infty$. Si $x > 3$, $\frac{3}{x-3} > 0$; si $x < 3$, es negativo. (1 punto)

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. En $x = 0$: $\lim_{x\to 0^-} f = a$ y $f(0) = 2$, luego $a = 2$. En $x = 2$: $f(2) = 2b + 2$ y $\lim_{x\to 2^+} f = 4$, luego $2b + 2 = 4$, $b = 1$. En el resto los trozos son continuos (el último no se anula en $x > 2$). (2,5 puntos)

b. $f(-1) = 1 + 2 = 3$, $f(1) = 1 + 2 = 3$ y $f(4) = \frac{8}{4} = 2$. Cada valor usa su tramo:

$-1 < 0$, $0 \leq 1 \leq 2$ y $4 > 2$. (0,75 puntos)

c. Por la derecha, $\lim_{x \to +\infty} \frac{8}{x} = 0$: asíntota $y = 0$. Por la izquierda $x^2 + 2 \to +\infty$, no hay. Por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal solo por la derecha. (0,75 puntos)

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos, existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$. (1 punto)

b. $g(x) = x^3 - 3x + 1$ es continua. $g(-2) = -1$, $g(-1) = 3$, $g(0) = 1$, $g(1) = -1$, $g(2) = 3$. Hay cambios de signo en $(-2, -1)$, $(0, 1)$ y $(1, 2)$: al menos tres raíces. Las imágenes se calculan sustituyendo; por ejemplo, $g(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$. (2 puntos)

c. No: un polinomio de grado 3 tiene como mucho tres raíces reales. En consecuencia, la ecuación tiene exactamente tres soluciones reales. (1 punto)

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. $P(0) = \frac{100}{10} = 10$ palabras por minuto y $P(6) = \frac{50 \cdot 8}{16} = 25$ palabras por minuto. En 6 semanas ha mejorado 15 palabras por minuto. (1 punto)

b. $\dfrac{50(t+2)}{t+10} = 30$: $50t + 100 = 30t + 300$, $20t = 200$, $t = 10$ semanas. Se puede multiplicar en cruz porque $t + 10 > 0$. (1 punto)

c. Grados iguales: el límite es $\frac{50}{1} = 50$. Por mucho que practique, el alumno se acerca a 50 palabras por minuto (asíntota horizontal). El límite se calcula como cociente de coeficientes principales: $\frac{50t}{t} \to 50$. (1 punto)

d. No: $P(t) < 50$ para todo t, porque $50(t+2) < 50(t+10)$. Nunca llegaría a 60. La diferencia $50 - P(t) = \frac{400}{t+10}$ es siempre positiva, aunque cada vez menor. (1 punto)