Apuntes - Límites, continuidad y derivadas: repaso

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Actividad de introducción: el café que nunca llega a 20 grados

Sirves un café a 90 grados en una cafetería donde la temperatura es de 20 grados. Al principio se enfría deprisa, luego cada vez más despacio. ¿Llegará algún día a 20 grados exactos? En teoría, nunca: se acerca tanto como quieras, pero no la alcanza. Esa idea de acercarse sin llegar es la de límite, y la recta horizontal a la que se acerca la gráfica es una asíntota. Piensa ahora en otra pregunta: si a las ocho de la mañana el café estaba a 90 grados y a las nueve a 30, ¿hubo algún instante en que estuvo exactamente a 50? Parece evidente que sí, porque la temperatura no puede saltar de un valor a otro. Esa intuición es el teorema de Bolzano, y funciona porque la temperatura es una función continua. En este tema repasarás el cálculo de límites, aprenderás a resolver todas las indeterminaciones que aparecen en la PAU, a hallar asíntotas, a estudiar la continuidad y a usar los grandes teoremas de las funciones continuas.

Límites: cálculo e indeterminaciones

Definición: límites: cálculo e indeterminaciones

El límite $\lim_{x\to a} f(x) = L$ describe el valor al que se acerca f cuando x se acerca a a. Existe si los límites laterales coinciden. Las operaciones con límites funcionan si no aparecen indeterminaciones. Las formas indeterminadas son $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0. Los métodos habituales son:

Propiedades: límites: cálculo e indeterminaciones

- **Cociente de polinomios en ∞:** se comparan los grados. Mismo grado: cociente de coeficientes principales. Mayor el numerador: $\pm\infty$. Menor: 0.
- $\frac{0}{0}$ **con polinomios:** se factoriza y se simplifica. Con raíces: se multiplica por el conjugado.
- $\infty - \infty$ **con raíces:** se multiplica y divide por el conjugado.
- 1^∞**:** $\lim f^g = e^{\lim g\,(f-1)}$ (si $f \to 1$ y $g \to \infty$); en particular $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e$.
- **Límites notables:** $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$, $\frac{e^x - 1}{x} \to 1$, $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ (cuando $x \to 0$).

Ejemplo 1

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$. **Ejemplo 2.**
$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim\frac{x^2-(x^2+x)}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=-\frac{1}{2}$. **Ejemplo 3.**
$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^{\lim x\cdot\frac{2}{x}}=e^2$.

Asíntotas

Propiedades: asíntotas

- **Vertical** $x=a$: si $\lim_{x\to a^\pm}f(x)=\pm\infty$.
- **Horizontal** $y=b$: si $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=b$.
- **Oblicua** $y=mx+n$: $m=\lim\frac{f(x)}{x}\neq 0$ finito, $n=\lim(f(x)-mx)$ finito. Si f es racional y el grado del numerador supera en 1 al del denominador, se obtiene por división.

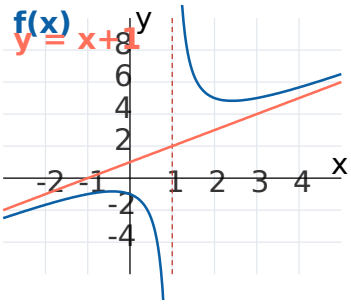


Figura: $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ *tiene asíntota vertical* $x=1$ *y oblicua* $y=x+1$.

Continuidad

Definición: continuidad

f es **continua en** a si existe $f(a)$, existe $\lim_{x\to a}f(x)$ y ambos coinciden. Tipos de discontinuidad: **evitable** (el límite existe pero no coincide con $f(a)$ o $f(a)$ no existe), de **salto finito** (límites laterales finitos distintos) y de **salto infinito** (algún lateral infinito). Las funciones elementales son continuas en su dominio. En funciones definidas a trozos, se estudia la continuidad en los puntos de unión igualando los límites laterales y el valor.

Ejemplo 2

$f(x)=\begin{cases}x^2+a & x\leq 1\\ 2x+1 & x>1\end{cases}$ es continua en $x=1$ si $1+a=3$, es decir, $a=2$.

Teoremas de continuidad

Propiedades: teoremas de continuidad

- **Bolzano:** si f es continua en $[a,b]$ y $f(a)f(b)$, existe $c \in (a,b)$ con $f(c)=0$.
- **Valores intermedios (Darboux):** una función continua en $[a,b]$ toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.
- **Weierstrass:** una función continua en $[a,b]$ alcanza máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

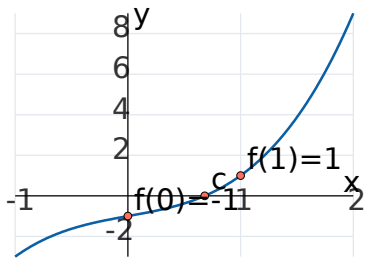


Figura: $f(x)=x^3+x-1$ cambia de signo en $[0,1]$, luego tiene una raíz c (Bolzano).

Ejemplo 3

Para probar que $x^3+x-1=0$ tiene solución en $(0,1)$: f es continua (polinomio), $f(0)=-1$ y $f(1)=1>0$. Por Bolzano, existe $c \in (0,1)$ con $f(c)=0$. Además es única, porque $f'(x)=3x^2+1>0$ y f es estrictamente creciente.

Repaso de derivadas

Definición: repaso de derivadas

La derivada $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ es la pendiente de la recta tangente. Reglas: $(x^n)'=nx^{n-1}$, $(e^x)'=e^x$, $(a^x)'=a^x\ln a$, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$, $(\tan x)'=1+\tan^2 x$, $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$, $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; producto $(fg)'=f'g+fg'$; cociente $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$; cadena $(f\circ g)'=f'(g)\,g'$. Para $f(x)^{g(x)}$ se usa la derivación logarítmica. La recta tangente en a es $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Errores frecuentes

¡Atención!

- Escribir $\frac{\infty}{\infty}=1$ o $\infty-\infty=0$.
- Olvidar los límites laterales en funciones a trozos o con valor absoluto.
- Usar Bolzano sin comprobar la continuidad en el intervalo cerrado.

- Olvidar la regla de la cadena al derivar funciones compuestas.

Más ejemplos

Ejemplo 4

$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}$. En $x=1$, $\lim f=\lim \frac{x+1}{x}=2$ y $f(1)$ no existe: discontinuidad evitable. En $x=0$, el límite lateral es $\pm\infty$: salto infinito y asíntota vertical $x=0$.

Ejemplo 5

$\frac{x^2+1}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}$: la asíntota oblicua es $y=x+1$, porque $\frac{2}{x-1}\to 0$. La curva queda por encima de la asíntota cuando $x>1$.

Ejemplo 6

Para $f(x)=x\ln x$, $f'(x)=\ln x+1$, $f(1)=0$, $f'(1)=1$: la tangente en $x=1$ es $y=x-1$.

Método: resolver un límite

1. Sustituye. Si sale un número, has terminado.
2. Identifica la indeterminación.
3. Aplica la técnica: factorizar, conjugado, grados o número e.
4. Estudia los límites laterales si hay valor absoluto, trozos o asíntotas verticales.

Estrategia para resolver cualquier límite

Método: tabla de indeterminaciones

1. Sustituye siempre primero: muchas veces el límite sale directamente y no hay que hacer nada más.
2. Si sale $\frac{k}{0}$ con $k\neq 0$, el límite es infinito: estudia los límites laterales para conocer el signo.
3. Si sale $\frac{0}{0}$ con polinomios, factoriza y simplifica el factor común; con raíces, multiplica por el conjugado.
4. Si sale $\frac{\infty}{\infty}$, divide entre la mayor potencia de x o compara grados.
5. Si sale $\infty-\infty$, opera las fracciones o multiplica por el conjugado.
6. Si sale 1^∞, aplica $e^{\lim g(x)(f(x)-1)}$.
7. Si sale $0\cdot\infty$, transforma el producto en un cociente.

Ejemplo 7

Calcula $\lim_{n\to\infty} 1\,000\left(1+\frac{0{,}03}{n}\right)^{10n}$.

Es una indeterminación del tipo uno elevado a infinito. El exponente multiplicado por lo que excede de 1 la base vale $10n\cdot\frac{0{,}03}{n}=0{,}3$, así que el límite es $1\,000e^{0{,}3}$, unos 1 349,86 euros. Este cálculo explica de dónde sale el número e en economía: es el factor de crecimiento cuando los intereses se acumulan de forma continua.

¡Atención!

Las expresiones $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ y 1^{∞} no tienen un valor fijo: el resultado depende de la función. En cambio, $\frac{5}{0}$ no es una indeterminación, sino un límite infinito, y $\frac{0}{5}=0$. Tampoco son indeterminaciones $\infty+\infty=\infty$ ni $\infty\cdot\infty=\infty$. Otro error frecuente es creer que $1^{\infty}=1$ porque una potencia de 1 siempre vale 1: la base no vale exactamente 1, solo se acerca, y el exponente crece sin parar, por eso puede salir cualquier número positivo.

Los grandes teoremas de las funciones continuas

Teorema de Weierstrass

Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, alcanza en él un valor máximo y un valor mínimo absolutos. Las dos condiciones son necesarias: la función $\frac{1}{x}$ en $(0,1]$ no tiene máximo porque el intervalo no es cerrado, y una función con un salto puede no alcanzar el valor al que se acerca.

Teorema de los valores intermedios (Darboux)

Si f es continua en $[a,b]$, toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Es una consecuencia del teorema de Bolzano: para ver que f toma el valor k, se aplica Bolzano a la función $g(x)=f(x)-k$. Así se justifica, por ejemplo, que un café que pasa de 90 a 30 grados estuvo en algún momento a 50 grados.

Método: aproximar una raíz por bisección

1. Busca un intervalo $[a,b]$ en el que la función continua cambie de signo.
2. Calcula el valor en el punto medio $m=\frac{a+b}{2}$.
3. Quédate con la mitad del intervalo en la que sigue habiendo cambio de signo.
4. Repite hasta que el intervalo sea tan pequeño como la precisión que se pide; cada paso divide el error entre dos.

Ejemplo 8

Demuestra que la ecuación $e^x = 3 - x$ tiene una única solución y aproxímala.

La función $g(x) = e^x + x - 3$ es continua y estrictamente creciente, porque es suma de dos funciones crecientes. Como $g(0) = -2$ y $g(1) = e - 2 > 0$, por el teorema de Bolzano hay una raíz entre 0 y 1, y por la monotonía es la única. Con la bisección: $g(0{,}5)$, $g(0{,}75)$ y $g(0{,}8) > 0$, así que la raíz está entre 0,75 y 0,8, aproximadamente en 0,79.

Continuidad y asíntotas en la vida real

Propiedad: qué nos dicen las discontinuidades y las asíntotas

Muchas magnitudes de la vida diaria son continuas: la temperatura, la altura de un balón o la concentración de un medicamento cambian sin saltos. Otras, en cambio, se comportan a saltos: el precio de un aparcamiento que cobra por horas o fracción, la tarifa del agua por tramos o el número de alumnos de una clase. En los problemas de enunciado conviene preguntarse primero si la magnitud puede saltar o no. Las asíntotas también tienen un significado concreto: una asíntota horizontal indica un valor de equilibrio o una capacidad máxima, como la población que puede mantener un embalse o la velocidad máxima de escritura de un alumno; una asíntota vertical indica que la magnitud se dispara, como el coste medio de fabricar muy pocas unidades. Cuando una tarifa por tramos debe ser continua, se igualan los límites laterales en cada cambio de tramo y se obtienen ecuaciones para los parámetros.

Ejemplo 9

¿Qué valores deben tener a y b para que la función $f(x) = x^2 + a$ si x, $f(x) = bx + 2$ si $0 \leq x \leq 2$ y $f(x) = 8/x$ si $x > 2$ sea continua?

Cada trozo es continuo en su intervalo, así que solo hay que estudiar los puntos de unión. En $x = 0$ el límite por la izquierda es a y el valor de la función es 2: hace falta $a = 2$. En $x = 2$ el valor es $2b + 2$ y el límite por la derecha es 4: hace falta $b = 1$. Con esos valores la función es continua en toda la recta real.

Observación: un poco de historia

La idea de límite tardó siglos en precisarse. Newton y Leibniz usaban cantidades «infinitamente pequeñas» sin definirlas bien, y el filósofo George Berkeley se burlaba de ellas llamándolas «fantasmas de cantidades desaparecidas». Fue a principios del siglo XIX cuando Bernard Bolzano, un sacerdote y matemático de Praga, y Augustin-Louis Cauchy dieron definiciones rigurosas de límite y de continuidad. Karl Weierstrass completó el trabajo con la definición con épsilon y delta que se estudia hoy en la universidad. Los programas que usan los ingenieros para resolver ecuaciones siguen aplicando métodos de bisección muy parecidos al que acabas de aprender.

El consejo de Otto

Ante un límite, sustituye primero. Si sale un número, has terminado; si sale una indeterminación, identifica de qué tipo es y aplica el método correspondiente (factorizar, conjugado, grados o número e).