Ejercicios - Límites, continuidad y derivadas: repaso

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Límites en el infinito

Para calcular el límite en el infinito de un cociente de polinomios se comparan los grados: se divide numerador y denominador entre la mayor potencia de x del denominador.

a. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - x + 2}{5x^2 + 4}$

b. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3}$

c. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 - 2}{4x^2 + x}$

d. Explica la regla general según los grados del numerador y del denominador.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Indeterminación cero entre cero

Si al sustituir aparece $\frac{0}{0}$, el numerador y el denominador tienen un factor común $(x - a)$: se factorizan (con Ruffini si hace falta) y se simplifica.

a. $\lim_{x\to1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

b. $\lim_{x\to3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

c. $\lim_{x\to2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Límites con raíces: el conjugado

Cuando aparecen raíces en una indeterminación $\infty - \infty$ o $\frac{0}{0}$, se multiplica y se divide por el conjugado, porque $(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$.

a. $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - x\right)$

b. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

c. $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – La indeterminación uno elevado a infinito

Si $f(x)\to 1$ y $g(x)\to \infty$, se usa $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\,(f(x)-1)}$, que generaliza $\lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

a. $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^x$

b. $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$

c. $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{x+1}$

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Asíntotas de una función racional

Se considera $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$. Las asíntotas verticales están donde el denominador se anula y el numerador no; la oblicua $y=mx+n$ tiene $m=\lim \frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim(f(x)-mx)$.

a. Halla el dominio y la asíntota vertical. Calcula los límites laterales.
b. ¿Tiene asíntota horizontal?
c. Halla la asíntota oblicua.
d. Estudia la posición de la gráfica respecto de la asíntota oblicua.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Continuidad de una función a trozos

Una función es continua en $x=c$ si existen $f(c)$ y $\lim_{x\to c} f(x)$ y son iguales. Se considera $f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{si } x<2 \\ x^2-3 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$.

a. Calcula los límites laterales en $x=2$ y $f(2)$.
b. Halla a para que f sea continua en $\mathbb{R}$.
c. Para $a=0$, ¿qué tipo de discontinuidad tiene en $x=2$? ¿Cuánto mide el salto?

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Tipos de discontinuidad

Una discontinuidad es evitable si existe el límite (finito) pero no coincide con $f(c)$ o $f(c)$ no existe; es de salto si los límites laterales son distintos, y de salto infinito (asintótica) si alguno es infinito. Se considera $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$.

a. Halla los puntos donde f no está definida.
b. Estudia el tipo de discontinuidad en $x = 1$ y redefine f para que sea continua allí.
c. Estudia el tipo de discontinuidad en $x = 0$.
d. Halla la asíntota horizontal.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Los peces del embalse

En un embalse de Extremadura se sueltan alevines de trucha. Un modelo da el número de peces (en cientos) al cabo de t años: $P(t) = \dfrac{800t + 600}{t + 3}$, con $t \geq 0$.

a. ¿Cuántos peces se soltaron al principio?
b. ¿Cuántos habrá al cabo de 2 años?
c. ¿Cuándo habrá 60 000 peces?
d. Calcula $\lim_{t \to +\infty} P(t)$ e interprétalo.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – El coste medio de una camiseta

Un taller de serigrafía de Elche tiene unos gastos fijos de 2 000 € al mes y cada camiseta estampada le cuesta 15 €. El coste medio por camiseta cuando fabrica x camisetas es $C_m(x) = \dfrac{2\,000 + 15x}{x}$.

a. Calcula el coste medio para 100, 500 y 2 000 camisetas.
b. Calcula $\lim_{x \to +\infty} C_m(x)$ e interprétalo.
c. Si vende cada camiseta a 20 €, ¿cuántas tiene que fabricar como mínimo para no perder dinero?
d. ¿Qué ocurre con $C_m(x)$ cuando $x \to 0^+$? ¿Tiene sentido?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – La tarifa del aparcamiento

Un aparcamiento del centro de Granada cobra 2 € por la primera hora o fracción y 1,50 € por cada hora o fracción siguiente, hasta un máximo de 12 € al día. Sea $P(t)$ el precio en euros por t horas, con 0.

a. Calcula $P(0{,}5)$, $P(1)$, $P(1{,}2)$ y $P(3)$.
b. Calcula $\lim_{t\to 1^-} P(t)$ y $\lim_{t\to 1^+} P(t)$. ¿Es continua en $t=1$?
c. ¿En qué puntos de $(0, 24]$ es discontinua P? ¿De qué tipo?
d. ¿A partir de cuántas horas se paga el máximo?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El café que se enfría

Un café recién servido en una cafetería de Santander está a 90 °C. Su temperatura al cabo de t minutos es $T(t) = 20 + 70e^{-0{,}1t}$.

a. Comprueba la temperatura inicial y calcula la temperatura a los 10 minutos.
b. Calcula $\lim_{t\to+\infty} T(t)$ e interpreta el resultado.
c. Justifica con el teorema de Bolzano que en algún momento entre 0 y 20 minutos el café está a 50 °C.
d. Calcula exactamente ese momento.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – La caja de cartón y el método de bisección

En una tienda de regalos se fabrican cajas sin tapa recortando cuadrados de lado x dm en las esquinas de una lámina de 10 dm de lado. El volumen es $V(x) = x(10-2x)^2$ dm³. Se busca un valor de x entre 0 y 1 con volumen 60 dm³.

a. Justifica con el teorema de Bolzano que existe tal valor en $(0, 1)$.
b. Aplica dos pasos del método de bisección para acotarlo.
c. Da el valor con una cifra decimal.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – La hucha del banco y el número e

Lucía deja 1 000 € en una cuenta al 3 % anual durante 10 años. Si los intereses se acumulan n veces al año, el capital final es $C = 1\,000\left(1+\frac{0{,}03}{n}\right)^{10n}$.

a. Calcula el capital si los intereses se acumulan una vez al año.
b. Calcula el capital si se acumulan cada mes ($n=12$).
c. Calcula $\lim_{n\to\infty} 1\,000\left(1+\frac{0{,}03}{n}\right)^{10n}$ (interés continuo).
d. ¿Merece la pena pedir al banco el interés continuo? Razona.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – La velocidad del balón

En un partido de baloncesto en Badalona, un balón se lanza hacia arriba y su altura en metros a los t segundos es $h(t) = 20t - 4{,}9t^2$ (sin contar la altura inicial). La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media.

a. Calcula la velocidad media entre $t = 1$ y $t = 1 + k$.
b. Calcula la velocidad instantánea en $t = 1$ como límite cuando $k \to 0$.
c. Comprueba el resultado derivando h.
d. ¿En qué instante la velocidad es 0? ¿Qué altura alcanza?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: un medicamento en la sangre

En un ensayo de un hospital de Pamplona se estudia la concentración de un medicamento en la sangre, en mg/L, a las t horas de tomarlo: $C(t) = \dfrac{10t}{t^2 + 4}$. El efecto terapéutico necesita al menos 2 mg/L. Algunos valores aparecen en la tabla.

t (horas)	0	1	2	4	8
C(t) (mg/L)	0				

a. Completa la tabla.
b. Calcula $\lim_{t \to +\infty} C(t)$ e interprétalo.
c. Justifica que C es continua en $[0, +\infty)$.
d. Halla entre qué horas el medicamento hace efecto ($C \geq 2$).
e. La concentración máxima se alcanza en $t = 2$ h. Calcúlala. ¿Por qué el médico recetaría una segunda dosis?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: la tarifa por tramos

Una compañía de agua de un municipio de Alicante factura el consumo mensual x (en m³) con la función $F(x) = \begin{cases} a + 0{,}5x & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 8 + bx & \text{si } 1030 \end{cases}$ (euros). La ley exige que la factura no dé saltos al cambiar de tramo. Se sabe que con un consumo nulo se paga una cuota fija de 4 €.

Tramo	Consumo (m³)	Precio por m³
1	0 a 10	0,50 €
2	10 a 30	b
3	más de 30	2 €

a. Halla a.
b. Halla b para que F sea continua en $x = 10$.
c. Halla c para que F sea continua en $x = 30$.
d. Calcula la factura de una familia que consume 12 m³ y la de otra que consume 40

m³.

e. Explica qué significa que cada tramo tenga una pendiente mayor que el anterior.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: la temperatura de un día de primavera

Una estación meteorológica de Toledo modeliza la temperatura (°C) entre las 0 h y las 24 h con $T(h) = -\frac{1}{8}h^2 + 3h + 2$. Las mediciones reales a algunas horas aparecen en la tabla. Se quiere saber si a lo largo del día se alcanzaron los 19 °C y cuál fue la máxima.

Hora	0 h	8 h	12 h	16 h
Temperatura (°C)	2	18	20	18

a. Comprueba que el modelo reproduce los datos de la tabla.
b. Justifica con el teorema de Bolzano que entre las 8 h y las 10 h la temperatura fue de 19 °C.
c. Halla exactamente esa hora.
d. Enuncia el teorema de Weierstrass y justifica que hubo una temperatura máxima en $[0, 24]$.
e. Calcula la máxima y la hora en que se alcanzó.
f. ¿Es razonable el modelo a las 24 h? Explica sus límites.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: estudio completo de asíntotas

Se considera la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x + 1}$. En la PAU se pide a menudo hallar todas las asíntotas y la posición relativa de la gráfica.

a. Halla el dominio y los puntos de corte con los ejes.
b. Halla la asíntota vertical y los límites laterales.
c. Halla la asíntota oblicua.
d. Estudia la posición relativa de la gráfica y la asíntota oblicua.
e. Con una tabla de valores para $x = 10$, 100 y $1\,000$, comprueba que $f(x) - (2x - 5)$ se acerca a 0.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: ¿cuándo se igualan dos funciones?

Una tienda en línea de Bilbao compara dos campañas. El número de visitas (en miles) a los t meses es $V_1(t) = e^t$ en la primera y $V_2(t) = 3 - t$ en la segunda. Se quiere saber cuándo tienen las mismas visitas.

a. Plantea la ecuación y explica por qué no se puede resolver con álgebra elemental.

b. Demuestra con el teorema de Bolzano que hay una solución en $(0, 1)$.
c. Demuestra que es la única (piensa en la monotonía de $e^t + t$).
d. Acótala con el método de bisección hasta una décima.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: límites con parámetro

Para ir más allá. Halla en cada caso el valor del parámetro.

a. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - x \right) = 3$.
b. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = e^2$.
c. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + bx - 6}{x - 2}$ es finito. Halla b y el límite.