Soluciones - Límites, continuidad y derivadas: repaso

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

Se divide el numerador y el denominador entre la potencia de mayor grado del denominador; los términos con potencias negativas tienden a cero y queda un cálculo sencillo.

a. Mismo grado: el límite es el cociente de los coeficientes principales. Dividiendo entre x^2: $\dfrac{3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{5+\frac{4}{x^2}} \to \dfrac{3}{5}$.

b. Grado del numerador menor: dividiendo entre x^2, $\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}} \to \dfrac{0}{1} = 0$.

c. Grado del numerador mayor: el límite es infinito. Dividiendo entre x^2: $\dfrac{x-\frac{2}{x^2}}{4+\frac{1}{x}}$; el numerador tiende a $-\infty$ y el denominador a 4, así que el límite es $-\infty$.

d. Si el grado del numerador es mayor, el límite es $\pm\infty$ (el signo depende de los coeficientes y del sentido); si son iguales, el cociente de coeficientes principales; si es menor, 0.

Solución del ejercicio 2

Al sustituir el punto en el numerador y en el denominador se obtiene cero entre cero. Eso significa que los dos polinomios tienen el factor común correspondiente a esa raíz: se factorizan, se simplifica el factor y se vuelve a sustituir.

a. $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ y $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Queda $\dfrac{x^2+x+1}{x+1} \to \dfrac{3}{2}$.

b. $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ y $x^2-9=(x-3)(x+3)$. Queda $\dfrac{x-2}{x+3} \to \dfrac{1}{6}$.

c. $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ y $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Queda $\dfrac{x+3}{x+2} \to \dfrac{5}{4}$.

Solución del ejercicio 3

Cuando hay raíces cuadradas y aparece una indeterminación, se multiplica y se divide por la expresión conjugada. Así desaparecen las raíces del numerador gracias a la diferencia de cuadrados y el límite se puede calcular comparando grados.

a. $\dfrac{(x^2+4x)-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$. Dividiendo entre x: $\dfrac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1} \to \dfrac{4}{2} = 2$.

b. $\dfrac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} \to \dfrac{1}{2}$.

c. $\dfrac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$. Dividiendo entre x: $\dfrac{2}{1+1} = 1$.

Solución del ejercicio 4

Las tres expresiones tienen una base que tiende a 1 y un exponente que tiende a infinito. Se aplica la fórmula del número e: el límite es e elevado al límite del exponente multiplicado por la diferencia entre la base y 1.

a. $\dfrac{x+3}{x-1} - 1 = \dfrac{4}{x-1}$ y $x \cdot \dfrac{4}{x-1} \to 4$. El límite es $e^4 \approx 54{,}60$.

b. $3x \cdot \dfrac{2}{x} = 6$. El límite es e^6.

c. $\dfrac{2x+1}{2x-3} - 1 = \dfrac{4}{2x-3}$ y $(x+1) \cdot \dfrac{4}{2x-3} = \dfrac{4x+4}{2x-3} \to 2$. El límite es e^2.

Solución del ejercicio 5

Las asíntotas verticales aparecen donde se anula el denominador y no el numerador. Como el grado del numerador supera en uno al del denominador, no hay horizontal pero sí oblicua, cuya pendiente y ordenada se calculan con dos límites.

a. Dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. En $x = 1$ el numerador vale 2: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Asíntota vertical $x = 1$.

b. No: el grado del numerador supera al del denominador y $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

c. $m = \lim \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = 1$; $n = \lim\left(\dfrac{x^2+1}{x-1} - x\right) = \lim \dfrac{x+1}{x-1} = 1$. Asíntota $y = x+1$.

d. $f(x) - (x+1) = \dfrac{2}{x-1}$: positivo si $x \to +\infty$ (la gráfica va por encima) y negativo si $x \to -\infty$ (por debajo).

Solución del ejercicio 6

En cada trozo la función es polinómica y, por tanto, continua. Solo hay que estudiar el punto de unión, imponiendo que los dos límites laterales coincidan con el valor de la función en ese punto.

a. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2a+1$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4-a$ y $f(2) = 4-a$.

b. En cada trozo es polinómica, luego continua. En $x = 2$: $2a+1 = 4-a$, $3a = 3$, $a = 1$.

c. Con $a = 0$: límites laterales 1 y 4, distintos y finitos. Discontinuidad de salto finito; el salto mide $4 - 1 = 3$.

Solución del ejercicio 7

Primero se buscan los puntos que anulan el denominador. En cada uno se calculan los límites laterales: si existe el límite finito la discontinuidad es evitable, y si es infinito hay una asíntota vertical.

a. $x^2 - x = x(x-1) = 0$ en $x = 0$ y $x = 1$.
b. $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \dfrac{x+1}{x} \to 2$. Es evitable: basta definir $f(1) = 2$.
c. Se simplifica a $\dfrac{x+1}{x}$; cerca de 0 el numerador tiende a 1 y el denominador a 0, así que $\lim_{x\to 0^+} = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} = -\infty$. Discontinuidad de salto infinito: asíntota vertical $x = 0$.
d. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2-x} = 1$: asíntota horizontal $y = 1$.

Solución del ejercicio 8

Para conocer la población en un instante se sustituye el tiempo en la fórmula; para saber cuándo se alcanza un valor se plantea una ecuación. El comportamiento a largo plazo lo da el límite en el infinito.

a. $P(0) = \dfrac{600}{3} = 200$ cientos: 20 000 peces.
b. $P(2) = \dfrac{2\,200}{5} = 440$ cientos: 44 000 peces.
c. $\dfrac{800t + 600}{t+3} = 600$: $800t + 600 = 600t + 1\,800$, $200t = 1\,200$, $t = 6$ años.
d. El límite es $\frac{800}{1} = 800$: la población se acerca a 80 000 peces sin superarlos. Es la capacidad máxima del embalse (asíntota horizontal).

Solución del ejercicio 9

a. $C_m(100) = \frac{3\,500}{100} = 35$ €; $C_m(500) = \frac{9\,500}{500} = 19$ €; $C_m(2\,000) = \frac{32\,000}{2\,000} = 16$ €.
b. $C_m(x) = \dfrac{2\,000}{x} + 15 \to 15$ €: con muchas camisetas, los gastos fijos se reparten y el coste medio se acerca al coste de cada una.
c. $\dfrac{2\,000}{x} + 15 \le 20$: $\dfrac{2\,000}{x} \le 5$, $x \ge 400$ camisetas.
d. Tiende a $+\infty$: con muy pocas camisetas cada una cargaría con todos los gastos fijos. Es la asíntota vertical $x = 0$.

Solución del ejercicio 10

a. $P(0{,}5) = 2$, $P(1) = 2$, $P(1{,}2) = 2 + 1{,}5 = 3{,}50$ y $P(3) = 2 + 2 \cdot 1{,}5 = 5$ €.
b. Por la izquierda vale 2 y por la derecha 3,50: límites distintos, no es continua (salto de 1,50 €).
c. En $t = 1, 2, 3, \ldots$ mientras no se llega al máximo: discontinuidades de salto finito. Es una función escalonada.
d. $2 + 1{,}5n \geq 12$ con n horas siguientes: $n \geq 6{,}67$, es decir, $n = 7$. Con más de 7 horas, $P = 2 + 10{,}5 = 12{,}5 > 12$: se paga el máximo de 12 € a partir de $t > 7$ h.

Solución del ejercicio 11

El valor inicial se obtiene con t igual a cero y el comportamiento a largo plazo con el límite. Para justificar que se alcanza una temperatura se aplica el teorema de Bolzano a la diferencia entre la función y ese valor.

a. $T(0) = 20 + 70 = 90$ °C. $T(10) = 20 + 70e^{-1} \approx 45{,}8$ °C.
b. $e^{-0{,}1t} \to 0$, luego $T \to 20$ °C: la temperatura de la cafetería (asíntota horizontal $T = 20$).
c. $g(t) = T(t) - 50$ es continua en $[0, 20]$, $g(0) = 40 > 0$ y $g(20) = 70e^{-2} - 30 \approx -20{,}53$. Por Bolzano existe $c \in (0, 20)$ con $g(c) = 0$.
d. $70e^{-0{,}1t} = 30$, $e^{-0{,}1t} = \frac{3}{7}$, $t = 10 \ln \frac{7}{3} \approx 8{,}47$ minutos.

Solución del ejercicio 12

El teorema de Bolzano asegura la existencia de la solución porque la función es continua y cambia de signo. La bisección consiste en evaluar en el punto medio y quedarse siempre con la mitad del intervalo donde sigue habiendo cambio de signo.

a. $g(x) = V(x) - 60$ es continua (polinómica). $g(0) = -60$ y $g(1) = 64 - 60 = 4 > 0$: por Bolzano hay una raíz en $(0, 1)$.
b. $g(0{,}5) = 0{,}5 \cdot 81 - 60 = -19{,}5$: la raíz está en $(0{,}5;\ 1)$.
$g(0{,}75) = 0{,}75 \cdot 72{,}25 - 60 \approx -5{,}81$: está en $(0{,}75;\ 1)$.
c. $g(0{,}9) = 0{,}9 \cdot 67{,}24 - 60 \approx 0{,}52 > 0$ y $g(0{,}85) \approx -1{,}44$, así que $x \approx 0{,}9$ dm (más exactamente, $0{,}886$).

Solución del ejercicio 13

El capital final se calcula con la fórmula del interés compuesto. Cuando el número de periodos crece sin límite, la expresión es una indeterminación del tipo uno elevado a infinito, cuyo resultado se expresa con el número e.

a. $1\,000 \cdot 1{,}03^{10} \approx 1343{,}92$ €.
b. $1\,000 \cdot 1{,}0025^{120} \approx 1349{,}35$ €.
c. Es de tipo 1^{∞}: $e^{\lim 10n \cdot \frac{0{,}03}{n}} = e^{0{,}3}$. Capital $1\,000e^{0{,}3} \approx 1349{,}86$ €.

d. Solo ganaría $0{,}51$ € más que con el interés mensual: la diferencia es muy pequeña.

Solución del ejercicio 14

La velocidad media es el cociente entre el cambio de altura y el tiempo transcurrido. La velocidad instantánea es el límite de esa velocidad media cuando el intervalo de tiempo se hace cada vez más pequeño, es decir, la derivada.

a. $\dfrac{h(1+k)-h(1)}{k} = \dfrac{20k - 4{,}9(2k+k^2)}{k} = 20 - 9{,}8 - 4{,}9k = 10{,}2 - 4{,}9k$.
b. $\lim_{k\to 0}(10{,}2 - 4{,}9k) = 10{,}2$ m/s.
c. $h'(t) = 20 - 9{,}8t$ y $h'(1) = 10{,}2$ m/s.
d. $20 - 9{,}8t = 0$, $t = \frac{20}{9{,}8} \approx 2{,}04$ s. Altura $h \approx 20{,}41$ m.

Solución del ejercicio 15

a. $C(1) = 2$, $C(2) = 2{,}5$, $C(4) = 2$, $C(8) = \frac{80}{68} \approx 1{,}18$ mg/L.
b. Grado del numerador menor: el límite es 0. El organismo elimina el medicamento.
c. Es un cociente de polinomios cuyo denominador $t^2 + 4$ no se anula nunca.
d. $\dfrac{10t}{t^2+4} \geq 2$: $10t \geq 2t^2 + 8$, $t^2 - 5t + 4 \leq 0$, $(t-1)(t-4) \leq 0$, es decir, $1 \leq t \leq 4$. Hace efecto entre la primera y la cuarta hora.
e. $C(2) = \frac{20}{8} = 2{,}5$ mg/L. A partir de las 4 horas la concentración queda por debajo de 2 mg/L y el efecto desaparece.

Solución del ejercicio 16

a. $F(0) = a = 4$.
b. $\lim_{x\to 10^-} F = 4 + 5 = 9$ y $\lim_{x\to 10^+} F = 8 + 10b$. Igualando, $b = 0{,}1$.
c. $\lim_{x\to 30^-} F = 8 + 3 = 11$ y $\lim_{x\to 30^+} F = 60 - c$. Igualando, $c = 49$.
d. $F(12) = 8 + 1{,}2 = 9{,}20$ € y $F(40) = 80 - 49 = 31$ €.
e. Las pendientes son 0,5; 0,1 y 2 €/m³: en realidad el segundo tramo es más barato y el tercero penaliza mucho el consumo excesivo. La pendiente es el precio de cada metro cúbico adicional.

Solución del ejercicio 17

a. $T(0) = 2$, $T(8) = -8 + 24 + 2 = 18$, $T(12) = -18 + 36 + 2 = 20$, $T(16) = -32 + 48 + 2 = 18$. Coinciden.
b. $g(h) = T(h) - 19$ es continua; $g(8) = -1$ y $g(10) = 19{,}5 - 19 = 0{,}5 > 0$. Existe $c \in (8, 10)$ con $T(c) = 19$.

c. $-\frac{1}{8}h^2 + 3h - 17 = 0$, $h^2 - 24h + 136 = 0$, $h = 12 - \sqrt{8} \approx 9{,}17$, es decir, hacia las 9:10.
d. Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza en él un máximo y un mínimo absolutos. T es polinómica, luego continua en $[0, 24]$.
e. Es una parábola con vértice en $h = \dfrac{-3}{2 \cdot (-1/8)} = 12$: máxima de 20 °C a las 12 h.
f. $T(24) = -72 + 72 + 2 = 2$ °C, razonable para la noche; pero el modelo es simétrico respecto del mediodía y en la realidad la temperatura máxima suele llegar por la tarde.

Solución del ejercicio 18

El estudio de asíntotas sigue siempre el mismo orden: dominio, verticales con límites laterales, horizontales u oblicuas con límites en el infinito y, por último, la posición relativa estudiando el signo de la diferencia entre la función y la asíntota.

a. Dominio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Corte con los ejes: $2x^2 - 3x = x(2x - 3) = 0$, puntos $(0, 0)$ y $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.
b. En $x = -1$ el numerador vale 5. $\lim_{x \to -1^-} f = \frac{5}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \to -1^+} f = +\infty$. Asíntota $x = -1$.
c. $m = \lim \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 + x} = 2$; $n = \lim \left(\dfrac{2x^2 - 3x}{x + 1} - 2x \right) = \lim \dfrac{-5x}{x + 1} = -5$. Asíntota $y = 2x - 5$.
d. $f(x) - (2x - 5) = \dfrac{5}{x + 1}$: positivo para $x \to +\infty$ (encima) y negativo para $x \to -\infty$ (debajo).
e. $\frac{5}{11} \approx 0{,}45$; $\frac{5}{101} \approx 0{,}05$; $\frac{5}{1\,001} \approx 0{,}005$. Se acerca a 0.

Solución del ejercicio 19

a. $e^t = 3 - t$, es decir, $g(t) = e^t + t - 3 = 0$. Mezcla una exponencial y un polinomio: no hay fórmula para despejar t.
b. g es continua; $g(0) = 1 - 3 = -2$ y $g(1) = e - 2 \approx 0{,}72 > 0$. Por Bolzano hay una raíz en $(0, 1)$.
c. e^t y t son crecientes, así que g es estrictamente creciente y solo puede anularse una vez.
d. $g(0{,}5) \approx -0{,}85$; $g(0{,}75) \approx -0{,}13$; $g(0{,}8) \approx 0{,}03 > 0$. La raíz está entre 0,75 y 0,8: $t \approx 0{,}8$ meses (más exactamente $0{,}792$).

Solución del ejercicio 20

En cada apartado se calcula el límite dejando el parámetro como una letra y después se iguala al valor pedido. En el último, el límite solo puede ser finito si el numerador también se anula en el punto.

a. Con el conjugado: $\dfrac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x} \to \dfrac{a}{2}$. Entonces $\frac{a}{2}=3$, $a=6$.
b. Es 1^∞: $e^{\lim x\cdot\frac{a}{x}}=e^a$, luego $a=2$.
c. Para que sea finito, el numerador debe anularse en $x=2$: $4+2b-6=0$, $b=1$.
   Entonces $\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}=x+3\to 5$.