Soluciones del examen - Integrales indefinidas

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · Duración: 60 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. $x^4 - 6\ln|x| + \dfrac{e^{2x}}{2} + C$. Se integra término a término: $\int 4x^3 dx = x^4$, $\int \frac{6}{x} dx = 6\ln|x|$ y $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}$. (1 punto)

b. Numerador derivada del denominador: $\ln|x^3+1| + C$. Es del tipo $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u|$, con $u = x^3+1$ y $u' = 3x^2$. (1 punto)

c. $\int \cos x (\sin x)^{-2} dx = \dfrac{(\sin x)^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{\sin x} + C$. Es del tipo $\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$, con $u = \sin x$ y $n = -2$. Comprobación: $\left(-\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$. (1 punto)

d. $\frac{1}{2}\int 2(2x+1)^{-1/2} dx = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{(2x+1)^{1/2}}{1/2} = \sqrt{2x+1} + C$. Se completa la derivada de $2x+1$, que es 2, multiplicando y dividiendo por 2. Comprobación: $(\sqrt{2x+1})' = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$. (1 punto)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $u = 2x+1$, $dv = e^x dx$: $du = 2dx$, $v = e^x$.
$(2x+1)e^x - \int 2e^x dx = (2x+1)e^x - 2e^x + C = (2x-1)e^x + C$. Se elige u el polinomio, que se simplifica al derivar, y dv la exponencial, fácil de integrar. Comprobación: $((2x-1)e^x)' = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x$. (2 puntos)

b. $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$: $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^3}{3}$. $\dfrac{x^3}{3}\ln x - \int \dfrac{x^2}{3} dx = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9} + C$. Aquí $u = \ln x$ porque el logaritmo no tiene primitiva inmediata y su derivada es sencilla. Comprobación: $\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right)' = x^2\ln x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{3} = x^2\ln x$. (2 puntos)

Criterio de elección: se deriva el factor que se simplifica y se integra el que no se complica; en a) la integral que queda, $\int 2e^x dx$, ya es inmediata.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. $x + 5 = A(x+2) + B(x-1)$: con $x = 1$, $6 = 3A$, $A = 2$; con $x = -2$, $3 = -3B$, $B = -1$. Las raíces del denominador son 1 y -2; dando a x esos valores se obtienen los numeradores: $\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$. (2

puntos)

b. $2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$. Cada fracción simple se integra como un logaritmo: $\int \frac{2}{x-1}dx = 2\ln|x-1|$ y $\int \frac{-1}{x+2}dx = -\ln|x+2|$. También se puede escribir $\ln\frac{(x-1)^2}{|x+2|} + C$. (1 punto)

c. $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2x+4-x+1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{x+5}{x^2+x-2}$. Al derivar el resultado se recupera el integrando, lo que confirma la descomposición. (1 punto)

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. $dt = 2x\,dx$: $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt = t^{1/2} + C = \sqrt{x^2+9} + C$. Se despeja $x\,dx = \frac{dt}{2}$; al integrar, $\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{1/2}}{1/2} = \sqrt{t}$, y se deshace el cambio. Comprobación: $\left(\sqrt{x^2+9}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = f(x)$. (2 puntos)

b. $F(4) = \sqrt{25} + C = 5 + C = 6$, $C = 1$: $F(x) = \sqrt{x^2+9} + 1$. La condición inicial elige una sola primitiva de la familia: $\sqrt{16+9} = 5$. (1 punto)

c. $F(0) = 3 + 1 = 4$. Detalle: $F(0) = \sqrt{0+9} + 1$. Es el valor mínimo de F, porque $F' = f$ es negativa para $x < 0$ y positiva para $x > 0$. (1 punto)

Interpretación: la gráfica de F es la de $\sqrt{x^2+9}$ desplazada una unidad hacia arriba, simétrica respecto del eje Y.

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. $v(t) = \int -1\,dt = -t + C$ con $v(0) = 20$: $v(t) = 20 - t$ m/s. La velocidad es una primitiva de la aceleración; la constante se fija con la velocidad inicial. (1 punto)

b. $s(t) = \int(20-t)dt = 20t - \frac{t^2}{2} + C$ con $s(0) = 0$: $s(t) = 20t - \frac{t^2}{2}$. La posición es una primitiva de la velocidad; como parte del origen, la constante es 0. (1 punto)

c. $v(t) = 0$ en $t = 20$ s. $s(20) = 400 - 200 = 200$ m. Se para cuando $v(t) = 0$, es decir, $20 - t = 0$. La distancia es la posición en ese instante: $s(20) = 20\cdot 20 - \frac{400}{2}$. (1,5 puntos)

d. No: necesita 200 m y solo tenía 180 m. Le faltan 20 m: rebasaría el semáforo. Para pararse en 180 m debería frenar con una deceleración de unos $\frac{20^2}{2\cdot 180} \approx 1{,}11$ m/s². (0,5 puntos)