Apuntes - Integrales indefinidas

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Actividad de introducción: del velocímetro al cuentakilómetros

El velocímetro de un coche indica en cada instante la velocidad, que es la derivada de la posición. El cuentakilómetros hace el camino contrario: a partir de la velocidad en cada instante, acumula la distancia recorrida. Pasar de una función a otra cuya derivada es la primera es lo que llamamos calcular una primitiva o integral indefinida. Piensa en estas preguntas antes de empezar: si conoces el coste de fabricar cada unidad adicional, ¿cómo calcularías el coste total? Si sabes a qué ritmo crece una población, ¿cómo sabrías cuántos habitantes habrá dentro de diez años? Si un grifo llena un depósito con un caudal que va cambiando, ¿cuánta agua habrá a los veinte minutos? Todas estas preguntas se responden integrando. En este tema aprenderás las integrales inmediatas y los tres grandes métodos de integración que aparecen en la PAU: el cambio de variable, la integración por partes y la descomposición en fracciones simples de las funciones racionales.

Primitiva e integral indefinida

Definición: primitiva e integral indefinida

F es una **primitiva** de f en un intervalo si $F'(x) = f(x)$. El conjunto de todas las primitivas es la **integral indefinida** $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, con $C \in \mathbb{R}$ la constante de integración.

Dos primitivas de una misma función difieren en una constante, por eso las gráficas de las primitivas son traslaciones verticales unas de otras.

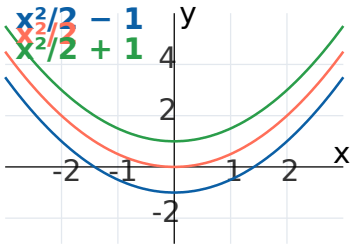


Figura: algunas primitivas de $f(x) = x$; todas tienen la misma pendiente en cada x.

Propiedad: linealidad

$\int (af + bg)\,dx = a\int f\,dx + b\int g\,dx$. Además, $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ y $\left(\int f\,dx\right)' = f$.

Integrales inmediatas

Tabla de integrales (con $u = u(x)$)

- $\int u^n u'\,dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$; $\int \dfrac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$.
- $\int e^u u'\,dx = e^u + C$; $\int a^u u'\,dx = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$.
- $\int \cos u\, u'\,dx = \sin u + C$; $\int \sin u\, u'\,dx = -\cos u + C$; $\int \dfrac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \tan u + C$.
- $\int \dfrac{u'}{1+u^2}\,dx = \arctan u + C$; $\int \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \arcsin u + C$.

Ejemplo 1

$\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx = x^3 - 2x^2 + 5x + C$.

Ejemplo 2

$\int (2x+3)^5\,dx = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x+3)^6}{6} + C = \dfrac{(2x+3)^6}{12} + C$ (ajustando $u' = 2$).

Cambio de variable

Método: sustitución

1. Elige $u = g(x)$ de modo que aparezca $g'(x)\,dx = du$.
2. Reescribe toda la integral en u, sin ninguna x.
3. Integra en u.
4. Deshaz el cambio y comprueba derivando.

Ejemplo 3

$\int x e^{x^2}\,dx$: $u = x^2$, $du = 2x\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{2} e^u\,du = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

Integración por partes

Fórmula de integración por partes

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Se elige u según el orden **ALPES**: Arcoseno/arcotangente, Logaritmo, Polinomio, Exponencial, Seno/coseno.

Ejemplo 4

$\int xe^x\,dx$: $u=x,\ dv=e^x dx \Rightarrow du=dx,\ v=e^x$. $= xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C$.

Ejemplo 5

$I = \int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - I \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$
.

Integrales racionales

Método: fracciones simples

1. Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, divide: $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$.
2. Factoriza Q.
3. Descompón: raíces simples $\frac{A}{x-a}$, raíz doble $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$, factor irreducible $\frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$.
4. Halla los coeficientes y integra cada término.

Ejemplo 6

$\int \frac{3x+5}{(x-1)(x+3)}dx$: $\frac{3x+5}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \Rightarrow 3x+5 = A(x+3) + B(x-1)$. Con $x=1$: $8 = 4A \Rightarrow A = 2$. Con $x=-3$: $-4 = -4B \Rightarrow B = 1$. Integral: $2\ln|x-1| + \ln|x+3| + C$.

Para denominador irreducible, se completa el cuadrado:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C.$$

¡Atención!

- Olvidar la constante C.
- Escribir $\int \frac{dx}{x^2+1} = \ln(x^2+1)$ en lugar de $\arctan x$.
- No ajustar la derivada interior: $\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x$, no $\sin 2x$.
- Elegir mal u y dv en partes y complicar la integral.

Integrales trigonométricas y otros casos

Definición: integrales trigonométricas y otros casos

Para potencias pares de seno o coseno se usan las fórmulas del ángulo doble:

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ y $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Para potencias impares se separa un factor y se usa $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Para $\tan x$ se escribe $\frac{\sin x}{\cos x}$ y se hace $u = \cos x$.

Ejemplo 7

$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$.

Ejemplo 8

$\int \cos^3 x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)\cos x\, dx$; con $u = \sin x$: $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

Cómo se plantean estos ejercicios en la PAU

Observación

La integral indefinida casi nunca se pide aislada: suele ser el primer apartado de un problema de áreas (se halla una primitiva y se aplica Barrow). Los tipos habituales son partes con polinomio por exponencial o logaritmo, fracciones simples con raíces reales y cambio de variable con una potencia o una exponencial. Aprende a reconocer el tipo: un producto de funciones de distinta naturaleza pide partes; un cociente de polinomios pide fracciones simples; una función compuesta con su derivada a la vista, sustitución. Indica siempre el cambio elegido y escribe la constante.

Ejemplo 9

Halla la primitiva de $f(x) = 6x^2 - 2x + 1$ con $F(0) = 3$. $F(x) = 2x^3 - x^2 + x + C$ y $F(0) = C = 3$. Por tanto $F(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$.

Método: elegir la técnica de integración

1. Mira si es inmediata o se arregla con un cambio lineal.
2. Si hay producto de tipos distintos, integra por partes.
3. Si es racional, descompón en fracciones simples.
4. Deriva el resultado para comprobarlo.

Cómo elegir el método de integración

Método: preguntas para elegir la técnica

1. ¿Se puede simplificar el integrando o separarlo en sumas? Si es así, hazlo primero: muchas integrales se convierten en inmediatas.
2. ¿Aparece una función y su derivada, aunque sea multiplicada por una constante? Usa las fórmulas casi inmediatas o el cambio de variable.

3. ¿Es un producto de dos tipos de funciones distintas, como un polinomio por una exponencial, un seno o un logaritmo? Usa la integración por partes.
4. ¿Es un cociente de polinomios? Si el grado del numerador es mayor o igual, divide; después descompón en fracciones simples según las raíces del denominador.
5. Comprueba siempre el resultado derivando: es la única forma segura de saber que la primitiva es correcta.

Ejemplo 10

Calcula $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x}\,dx$**.**

El grado del numerador es menor que el del denominador, que se factoriza como $x(x-1)(x+1)$. Se buscan tres coeficientes con $x^2+2x+3 = A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$. Dando a x los valores 0, 1 y -1 se obtiene $A=-3$, $B=3$ y $C=1$. La integral es $-3\ln|x|+3\ln|x-1|+\ln|x+1|+K$. Como comprobación rápida, la suma de los coeficientes debe ser el coeficiente de x^2 del numerador, que es 1.

Ejemplo 11

Un obrador tiene un coste marginal $C'(x)=0{,}6x+20$ euros y unos costes fijos de 500 €. Halla el coste total.

Se integra el coste marginal: $C(x)=0{,}3x^2+20x+K$. La constante se calcula con el dato de los costes fijos, que son el coste de no fabricar nada: $C(0)=K=500$. Así, $C(x)=0{,}3x^2+20x+500$. En los problemas de aplicación, la constante de integración casi siempre tiene un significado: posición inicial, población inicial, costes fijos o agua que había al principio.

¡Atención!

Nunca olvides la constante de integración C en una integral indefinida, y no escribas $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$ sin valor absoluto cuando x puede ser negativo. La integral de un producto no es el producto de las integrales, ni la de un cociente es el cociente de las integrales: para eso están las técnicas de este tema. En el cambio de variable hay que cambiar también el dx y, al final, deshacer el cambio. En la integración por partes, una mala elección de u hace que la integral nueva sea más difícil que la original: si te ocurre, prueba a intercambiar los papeles.

Primitivas con condiciones y aplicaciones

Propiedad: las primitivas forman una familia

Si F es una primitiva de f, todas las demás son $F+C$, y sus gráficas son traslaciones

verticales unas de otras. Para elegir una sola hace falta un dato, por ejemplo que pase por un punto. Si se conoce la derivada segunda, hay que integrar dos veces y aparecen dos constantes, que se calculan con dos datos, como la posición y la velocidad iniciales en un movimiento. Este es el razonamiento que usan los físicos para obtener las ecuaciones del movimiento a partir de la aceleración y los ingenieros para diseñar perfiles con una curvatura determinada.

Ejemplo 12

Un autobús circula a 20 m/s y frena con deceleración de 1 m/s². ¿Qué distancia recorre hasta pararse?

Integrando la aceleración se obtiene la velocidad $v(t) = 20 - t$, y integrando otra vez, la posición $s(t) = 20t - \frac{t^2}{2}$, con las constantes ajustadas a la velocidad inicial y a la posición inicial. El autobús se para cuando $v = 0$, a los 20 segundos, después de recorrer $s(20) = 200$ metros. Por eso la distancia de seguridad debe aumentar mucho con la velocidad: se multiplica por cuatro cuando la velocidad se duplica.

Cómo se hace: integrales por partes que se repiten

En integrales como $\int e^x \sin x \, dx$ o $\int e^x \cos x \, dx$, al aplicar dos veces la integración por partes vuelve a aparecer la integral del principio. No hay que desanimarse: se le pone un nombre, por ejemplo I, se escribe la igualdad que se ha obtenido y se despeja I como en una ecuación de primer grado. Es importante elegir en las dos aplicaciones el mismo tipo de función como u (en las dos, la trigonométrica, o en las dos, la exponencial); si se cambia, se deshace lo hecho y se vuelve al punto de partida. Al final se añade la constante de integración y se comprueba derivando, porque en este tipo de cálculo es fácil equivocarse con un signo.

Observación: integrales sin fórmula

Derivar es siempre posible con las reglas conocidas, pero integrar no: hay funciones sencillas, como e^{x^2} o $\frac{\sin x}{x}$, cuyas primitivas no se pueden escribir con las funciones elementales. El matemático francés Joseph Liouville demostró en el siglo XIX que es imposible. Para ellas se usan tablas de valores calculadas con ordenador o métodos numéricos. La primitiva de e^{-x^2}, por ejemplo, es tan importante en estadística que tiene nombre propio y sus valores aparecen en la tabla de la distribución normal que usarás en el último tema del curso. Por eso, en la práctica, conviene saber reconocer a primera vista qué integrales tienen primitiva elemental y cuáles no.

El consejo de Otto

Comprueba siempre tu primitiva derivándola: debe salir el integrando. Es una verificación de diez segundos que salva el apartado.