Ejercicios - Integrales indefinidas

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Integrales inmediatas de potencias

Una primitiva de x^n ($n \neq -1$) es $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, y la de $\dfrac{1}{x}$ es $\ln|x|$. Calcula, comprobando cada resultado al derivar:

a. $\displaystyle\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$

b. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

c. $\displaystyle\int \frac{2}{x}\,dx$

d. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x}{x}\,dx$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Exponenciales, trigonométricas y arcotangente

Usa la tabla de integrales inmediatas. Recuerda que si dentro aparece ax, hay que dividir entre a.

a. $\displaystyle\int e^{3x}\,dx$

b. $\displaystyle\int \cos(2x)\,dx$

c. $\displaystyle\int 5^x\,dx$

d. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Integrales casi inmediatas

Si en el integrando aparece una función u y su derivada u', se usan $\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$, $\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ y $\int u'e^u = e^u$.

a. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$
b. $\displaystyle\int x(x^2+3)^4\,dx$
c. $\displaystyle\int \cos x\,\sin^3 x\,dx$
d. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – La primitiva que pasa por un punto

Todas las primitivas de una función se diferencian en una constante. Para elegir una, basta un dato.

a. Halla todas las primitivas de $f(x) = 6x^2 - 2x$.
b. Halla la primitiva F que cumple $F(1) = 4$.
c. Halla la función g con $g''(x) = 6x$, $g'(0) = 1$ y $g(0) = 2$.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Cambio de variable

El cambio de variable $t = g(x)$, $dt = g'(x)\,dx$, transforma la integral en otra más sencilla. Al final se deshace el cambio.

a. $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$ con $t = x+1$.
b. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ con $t = 1+e^x$.
c. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ con $t = \ln x$.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Integración por partes

La fórmula es $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Conviene elegir como u la función que se simplifica al derivar (regla ALPES: arcos, logaritmos, polinomios, exponenciales, senos).

a. $\displaystyle\int xe^x\,dx$
b. $\displaystyle\int x\ln x\,dx$
c. $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Por partes dos veces y partes cíclicas

A veces hay que aplicar la fórmula de integración por partes varias veces, o la integral vuelve a aparecer y se despeja.

a. $\int x^2 e^x \, dx$

b. $\int e^x \sin x \, dx$

c. Comprueba los dos resultados derivando.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Integrales racionales con raíces simples

Si el denominador tiene raíces reales distintas, se descompone en fracciones simples: $\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$.

a. Factoriza $x^2 - x - 2$.

b. Descompón $\frac{5x-1}{x^2-x-2}$ en fracciones simples.

c. Calcula $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2} \, dx$.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Integrales racionales con una raíz doble

Si el denominador tiene una raíz doble, $\frac{P(x)}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$.

a. Descompón $\frac{x+3}{(x-1)^2}$.

b. Calcula $\int \frac{x+3}{(x-1)^2} \, dx$.

c. Comprueba el resultado derivando.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Cuando el numerador tiene grado mayor

Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, primero se divide: $\frac{P}{Q} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

a. Divide $x^2 + 1$ entre $x - 1$.

b. Calcula $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$.

c. Calcula $\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El tren que arranca

Un tren de cercanías sale de la estación de Atocha. Su aceleración (m/s²) durante los primeros 10 segundos es $a(t) = 0{,}6t$ m/s². Al arrancar ya se movía a 0,2 m/s.

a. Calcula la velocidad $v(t)$ integrando la aceleración.
b. Calcula la posición $s(t)$ si $s(0) = 0$.
c. ¿Qué distancia ha recorrido a los 10 s? ¿A qué velocidad va?
d. Expresa esa velocidad en km/h.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – El obrador de pan

Un obrador de pan de Valladolid conoce su coste marginal: fabricar la unidad número x (en cajas de pan) cuesta aproximadamente $C'(x) = 0{,}6x + 20$ euros. Los costes fijos diarios son de 500 €.

a. Halla la función de coste total $C(x)$.
b. Calcula el coste de fabricar 100 cajas.
c. Si vende cada caja a 70 €, escribe el beneficio $B(x)$.
d. ¿Cuántas cajas maximizan el beneficio?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – La población de un pueblo turístico

Un pueblo de la costa de Huelva tenía 5 000 habitantes en 2020. Desde entonces su población crece a un ritmo de $P'(t) = 300e^{0{,}1t}$ habitantes por año (t en años desde 2020).

a. Halla $P(t)$.
b. ¿Cuántos habitantes habrá en 2030?
c. ¿En qué año llegará a 15 000 habitantes?
d. ¿Es realista suponer que el ritmo se mantiene indefinidamente? Razona.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – El llenado del depósito

Un depósito de riego de una finca de Lleida tiene 100 L de agua. Se abre un grifo cuyo

caudal disminuye con el tiempo: $Q(t) = 40 - 2t$ litros por minuto, hasta que se cierra solo en $t = 20$ min.

a. Halla el volumen $V(t)$ de agua en el depósito.
b. ¿Cuánta agua hay cuando se cierra el grifo?
c. ¿Cuánto tiempo tarda en tener 400 L?
d. Explica por qué la gráfica de V es cóncava.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: el perfil de la rampa de skate

Un ayuntamiento de Málaga diseña una rampa para un parque de skate. Su perfil es la gráfica de una función f cuya curvatura viene dada por $f''(x) = 6x - 2$ (metros, $0 \le x \le 2$). Se quiere que en $x = 1$ la rampa tenga tangente horizontal y una altura de 2 m.

a. Halla $f'(x)$ usando la condición de la tangente horizontal.
b. Halla $f(x)$ usando la condición de la altura.
c. Calcula la altura en los extremos $x = 0$ y $x = 2$.
d. ¿Es $x = 1$ un máximo o un mínimo de la rampa?
e. ¿Dónde cambia la curvatura? ¿Qué sentirá el patinador al pasar por ese punto?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: una racional con tres raíces

Las integrales racionales son típicas de la PAU. Se pide calcular $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x}\,dx$ siguiendo el método completo y comprobando cada paso.

a. Comprueba que el grado del numerador es menor y factoriza el denominador.
b. Plantea la descomposición en fracciones simples.
c. Halla los coeficientes dando valores a x.
d. Comprueba los coeficientes con el coeficiente de x^2.
e. Calcula la integral.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: la absorción de un medicamento

En un estudio farmacológico de un hospital de Granada se mide el ritmo al que el organismo absorbe un medicamento: $r(t) = 20te^{-t/2}$ mg por hora, t horas después de tomarlo. La cantidad absorbida $A(t)$ cumple $A'(t) = r(t)$ y $A(0) = 0$. La tabla muestra el ritmo en algunos instantes.

t (h)	0	1	2	4	6
r(t) (mg/h)	0	12,13	14,72	10,83	5,97

a. Calcula $\int 20te^{-t/2}\,dt$ por partes.
b. Halla $A(t)$.
c. ¿Cuánto se ha absorbido a las 2 horas y a las 6 horas?
d. ¿Qué cantidad total se absorbe a largo plazo? ($\lim_{t\to\infty} A(t)$.)
e. ¿En qué instante el ritmo de absorción es máximo?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: integrales trigonométricas

Para integrar potencias pares de senos y cosenos se usan las fórmulas del ángulo doble: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ y $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

a. Calcula $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$.
b. Calcula $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$.
c. Calcula $\displaystyle\int \tan x\,dx$ escribiendo la tangente como cociente.
d. Calcula $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$ de dos formas y explica por qué los resultados parecen distintos.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: denominador sin raíces reales

Si el denominador es un polinomio de segundo grado sin raíces reales, se completa el cuadrado para llegar a la arcotangente: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^2+1} = \arctan(x-a)$.

a. Comprueba que x^2+4x+5 no tiene raíces reales y escríbelo como $(x+2)^2+1$.
b. Calcula $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.
c. Calcula $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx$.
d. Calcula $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2+4x+5}\,dx$ separándola en las dos anteriores.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: cambio de variable y partes juntos

Para ir más allá. Algunas integrales necesitan combinar técnicas.

a. Calcula $\displaystyle\int \ln x\,dx$ por partes, tomando $dv = dx$.

b. Calcula $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ con el cambio $t=\sqrt{x}$ y después por partes.

c. Comprueba el resultado del apartado b) derivando.