Soluciones - Integrales indefinidas

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

Se integra término a término gracias a la linealidad de la integral, sacando las constantes fuera. Las raíces y las potencias en el denominador se escriben antes como potencias de exponente fraccionario o negativo, y al final se comprueba cada resultado derivando.

a. $x^3 - 2x^2 + 5x + C$. Comprobación: $(x^3 - 2x^2 + 5x)' = 3x^2 - 4x + 5$.

b. $\sqrt{x} = x^{1/2}$ y $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$: $\dfrac{x^{3/2}}{3/2} + \dfrac{x^{-1}}{-1} = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + C$.

c. $2\ln|x| + C$.

d. Se simplifica antes: $x^2 - 2$. Primitiva $\dfrac{x^3}{3} - 2x + C$.

Solución del ejercicio 2

Son integrales de la tabla. Cuando la variable aparece multiplicada por un número dentro de la exponencial o del coseno, la derivada de la primitiva arrastra ese número, así que hay que dividir entre él para compensarlo.

a. $\dfrac{e^{3x}}{3} + C$, porque $\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)' = \frac{3e^{3x}}{3} = e^{3x}$.

b. $\dfrac{\sin(2x)}{2} + C$.

c. $\dfrac{5^x}{\ln 5} + C$.

d. $\arctan x + C$.

Solución del ejercicio 3

En todas aparece una función y, multiplicando, su derivada salvo una constante. Se identifica la función interior, se ajusta la constante multiplicando y dividiendo por el número que falta y se aplica la fórmula correspondiente de la tabla.

a. El numerador es la derivada del denominador: $\ln(x^2 + 1) + C$ (sin valor absoluto, porque $x^2 + 1 > 0$).

b. Con $u = x^2 + 3$, $u' = 2x$: $\frac{1}{2}\int 2x(x^2 + 3)^4 dx = \dfrac{(x^2 + 3)^5}{10} + C$.

c. Con $u = \sin x$: $\dfrac{\sin^4 x}{4} + C$.

d. $\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \dfrac{e^{x^2}}{2} + C.$

Solución del ejercicio 4

Integrar da una familia de primitivas que solo se diferencian en una constante. El dato del enunciado permite calcular esa constante sustituyendo el punto; con una segunda derivada hay que integrar dos veces y usar dos datos.

a. $F(x) = 2x^3 - x^2 + C.$
b. $F(1) = 2 - 1 + C = 4$, $C = 3$: $F(x) = 2x^3 - x^2 + 3.$
c. $g'(x) = 3x^2 + C_1$ con $C_1 = 1$; $g(x) = x^3 + x + C_2$ con $C_2 = 2$: $g(x) = x^3 + x + 2.$

Solución del ejercicio 5

En el cambio de variable se sustituye la expresión elegida por una nueva variable y también el diferencial. La integral nueva debe ser inmediata; al terminar se vuelve a escribir el resultado en función de x.

a. $x = t - 1$, $dx = dt$:
$\int (t-1)t^{1/2}dt = \int (t^{3/2} - t^{1/2})dt = \frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$
.
b. $dt = e^x dx$: $\displaystyle\int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(1 + e^x) + C.$
c. $dt = \dfrac{dx}{x}$: $\displaystyle\int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

Solución del ejercicio 6

En la integración por partes se elige como u la función que se simplifica al derivarla, como un polinomio o un logaritmo, y como dv la que se integra con facilidad. La integral que queda debe ser más sencilla que la original.

a. $u = x$, $dv = e^x dx$: $du = dx$, $v = e^x$. $xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$
b. $u = \ln x$, $dv = x\,dx$: $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$. $\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$
c. $u = x$, $dv = \cos x\,dx$: $v = \sin x$. $x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$

Solución del ejercicio 7

Cuando el polinomio es de grado dos hay que aplicar partes dos veces. En la integral con exponencial y seno la integral original vuelve a aparecer: se le pone nombre y se despeja como en una ecuación.

a. $u = x^2$, $v = e^x$: $x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$

b. Llamando I a la integral: con $u = \sin x$, $v = e^x$, $I = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$. Otra vez por partes con $u = \cos x$: $\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + I$. Entonces $I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$, y $I = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$.

c. $[(x^2 - 2x + 2)e^x]' = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = x^2 e^x$.
$\left[\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}\right]' = \frac{e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x)}{2} = e^x \sin x$.

Solución del ejercicio 8

Primero se factoriza el denominador con sus raíces. Después se escribe la fracción como suma de fracciones simples con coeficientes desconocidos, que se calculan dando a x los valores de las raíces, y cada fracción se integra como un logaritmo.

a. $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$.
b. $5x - 1 = A(x + 1) + B(x - 2)$. Con $x = 2$: $9 = 3A$, $A = 3$. Con $x = -1$: $-6 = -3B$, $B = 2$.
c. $3 \ln|x - 2| + 2 \ln|x + 1| + C$.

Solución del ejercicio 9

Una raíz doble obliga a usar dos fracciones simples: una con el factor y otra con el factor al cuadrado. La primera da un logaritmo y la segunda una potencia de exponente menos uno.

a. $x + 3 = A(x - 1) + B$. Con $x = 1$: $B = 4$. Coeficiente de x: $A = 1$.
b. $\displaystyle\int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{4\, dx}{(x - 1)^2} = \ln|x - 1| - \frac{4}{x - 1} + C$.
c. $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{4}{(x - 1)^2} = \dfrac{x - 1 + 4}{(x - 1)^2} = \dfrac{x + 3}{(x - 1)^2}$.

Solución del ejercicio 10

Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, la fracción no es propia y hay que dividir primero los polinomios. El cociente se integra directamente y el resto da una fracción propia.

a. Cociente $x + 1$ y resto 2: $\dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = x + 1 + \dfrac{2}{x - 1}$.
b. $\dfrac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x - 1| + C$.
c. $\dfrac{x^3}{x^2 + 1} = x - \dfrac{x}{x^2 + 1}$: $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$.

Solución del ejercicio 11

La velocidad es una primitiva de la aceleración y la posición es una primitiva de la velocidad. Cada integración añade una constante, que se calcula con la velocidad inicial y con la posición inicial.

a. $v(t) = \int 0{,}6t\,dt = 0{,}3t^2 + C$ con $v(0) = 0{,}2$: $v(t) = 0{,}3t^2 + 0{,}2$ m/s.
b. $s(t) = \int (0{,}3t^2 + 0{,}2)dt = 0{,}1t^3 + 0{,}2t + C$ con $s(0) = 0$: $s(t) = 0{,}1t^3 + 0{,}2t$.
c. $s(10) = 100 + 2 = 102$ m y $v(10) = 30 + 0{,}2 = 30{,}2$ m/s.
d. $30{,}2 \cdot 3{,}6 = 108{,}72$ km/h.

Solución del ejercicio 12

El coste total es la primitiva del coste marginal, y la constante de integración son los costes fijos, porque es lo que se paga sin fabricar nada. Después se escribe el beneficio y se maximiza derivando.

a. $C(x) = \int (0{,}6x + 20)dx = 0{,}3x^2 + 20x + K$ con $C(0) = 500$:
$C(x) = 0{,}3x^2 + 20x + 500$.
b. $C(100) = 3\,000 + 2\,000 + 500 = 5\,500$ €.
c. $B(x) = 70x - 0{,}3x^2 - 20x - 500 = -0{,}3x^2 + 50x - 500$.
d. $B'(x) = -0{,}6x + 50 = 0$, $x \approx 83{,}3$: 83 cajas ($B(83) \approx 1583{,}3$ €).

Solución del ejercicio 13

La población es la primitiva del ritmo de crecimiento. La constante se ajusta con la población inicial y, para saber cuándo se alcanza un valor, se resuelve una ecuación exponencial tomando logaritmos.

a. $P(t) = \int 300e^{0{,}1t}dt = 3\,000e^{0{,}1t} + C$; $P(0) = 3\,000 + C = 5\,000$, $C = 2\,000$.
$P(t) = 3\,000e^{0{,}1t} + 2\,000$.
b. $P(10) = 3\,000e + 2\,000 \approx 10155$ habitantes.
c. $3\,000e^{0{,}1t} = 13\,000$, $t = 10 \ln \frac{13}{3} \approx 14{,}7$ años: hacia 2034.
d. No: un crecimiento exponencial sin límite es imposible; faltarían viviendas, agua y servicios. Los modelos reales incluyen un límite (modelo logístico).

Solución del ejercicio 14

El volumen de agua es la primitiva del caudal, y la constante es el agua que había al principio. Para saber cuándo hay una cantidad dada se resuelve una ecuación de segundo grado y se elige la solución con sentido.

a. $V(t) = \int (40 - 2t)dt = 40t - t^2 + C$ con $V(0) = 100$: $V(t) = 100 + 40t - t^2$.
b. $V(20) = 100 + 800 - 400 = 500$ L.
c. $100 + 40t - t^2 = 400$, $t^2 - 40t + 300 = 0$, $t = 10$ min (la otra raíz, 30, está fuera del intervalo).

d. $V''(t) = -2$: el caudal disminuye, así que el volumen crece cada vez más despacio.

Solución del ejercicio 15

Se integra dos veces la segunda derivada. Cada integración introduce una constante: la primera se calcula con la condición de tangente horizontal y la segunda con la altura conocida en ese punto.

a. $f'(x) = 3x^2 - 2x + C_1$; $f'(1) = 3 - 2 + C_1 = 0$, $C_1 = -1$: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
b. $f(x) = x^3 - x^2 - x + C_2$; $f(1) = 1 - 1 - 1 + C_2 = 2$, $C_2 = 3$:
$f(x) = x^3 - x^2 - x + 3$.
c. $f(0) = 3$ m y $f(2) = 8 - 4 - 2 + 3 = 5$ m.
d. $f''(1) = 4 > 0$: mínimo (el fondo de la rampa).
e. $f''(x) = 0$ en $x = \frac{1}{3}$: la rampa pasa de cóncava a convexa y el patinador nota que deja de «caer» y empieza a ser empujado hacia arriba.

Solución del ejercicio 16

Es una integral racional con tres raíces simples en el denominador. Se plantea la igualdad de numeradores, se dan los valores de las tres raíces para obtener los coeficientes y se comprueba con el término de mayor grado.

a. Grado 2 frente a 3. $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$.
b. $\dfrac{x^2 + 2x + 3}{x(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+1}$, es decir,
$x^2 + 2x + 3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$.
c. $x = 0$: $3 = -A$, $A = -3$. $x = 1$: $6 = 2B$, $B = 3$. $x = -1$: $2 = 2C$, $C = 1$.
d. Coeficiente de x^2: $A + B + C = -3 + 3 + 1 = 1$. Correcto.
e. $-3\ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln|x+1| + K$.

Solución del ejercicio 17

La integral es un producto de un polinomio por una exponencial, así que se resuelve por partes con u igual al polinomio. La constante se obtiene imponiendo que al principio no se ha absorbido nada.

a. $u = 20t$, $dv = e^{-t/2}dt$: $du = 20dt$, $v = -2e^{-t/2}$.
$-40te^{-t/2} + \int 40e^{-t/2}dt = -40te^{-t/2} - 80e^{-t/2} + C$.
b. $A(0) = -80 + C = 0$, $C = 80$: $A(t) = 80 - (40t + 80)e^{-t/2}$.
c. $A(2) = 80 - 160e^{-1} \approx 21{,}1$ mg y $A(6) = 80 - 320e^{-3} \approx 64{,}1$ mg.
d. $te^{-t/2} \to 0$ y $e^{-t/2} \to 0$: se absorben 80 mg en total.
e. $r'(t) = 20e^{-t/2}(1 - \frac{t}{2}) = 0$ en $t = 2$ h, donde $r(2) = 40e^{-1} \approx 14{,}7$ mg/h.

Solución del ejercicio 18

Las potencias pares de seno y coseno se transforman con las fórmulas del ángulo doble, que bajan el exponente. La tangente se escribe como cociente para reconocer la derivada del denominador en el numerador.

a. $\int \dfrac{1-\cos 2x}{2}dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

b. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

c. $\int \dfrac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C$ (el numerador es menos la derivada del denominador).

d. Con $u = \sin x$: $\dfrac{\sin^2 x}{2} + C$. Con $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$: $-\dfrac{\cos 2x}{4} + C$. Como $-\frac{\cos 2x}{4} = -\frac{1-2\sin^2 x}{4} = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{4}$, solo se diferencian en una constante.

Solución del ejercicio 19

Si el denominador de segundo grado no tiene raíces reales, se completa el cuadrado para obtener una arcotangente. Si el numerador es la derivada del denominador, la integral es un logaritmo, y en general se separa en esos dos casos.

a. Discriminante $16 - 20 = -4$. $x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1$.

b. $\arctan(x+2) + C$.

c. El numerador es la derivada del denominador: $\ln(x^2 + 4x + 5) + C$.

d. $\dfrac{2x+7}{x^2+4x+5} = \dfrac{2x+4}{x^2+4x+5} + \dfrac{3}{x^2+4x+5}$:
$\ln(x^2 + 4x + 5) + 3\arctan(x+2) + C$.

Solución del ejercicio 20

Algunas integrales necesitan dos técnicas seguidas. El logaritmo se integra por partes tomando dv igual a dx, y la exponencial de una raíz se convierte, con un cambio de variable, en una integral que se resuelve por partes.

a. $u = \ln x$, $v = x$: $x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$.

b. $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$: $\int 2te^t dt = 2(t-1)e^t + C = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$.

c. $\left[2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} + 2(\sqrt{x}-1)\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x} - 1) = e^{\sqrt{x}}$.