Soluciones del examen - Integral definida, áreas y volúmenes

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · Duración: 60 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Primitiva $x^3 - x^2$: $(8-4) - 0 = 4$. Se aplica la regla de Barrow, $F(2) - F(0)$, con $F(x) = x^3 - x^2$. (1 punto)
b. Por partes, una primitiva es $(x-1)e^x$: $(0) \cdot e - (-1) \cdot 1 = 1$. Se toma $u = x$ y $dv = e^x dx$: $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x$. En $x = 1$ vale 0 y en $x = 0$ vale -1. (1,5 puntos)
c. Primitiva $\ln(x^2+1)$: $\ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}69$. El numerador es la derivada del denominador, así que la primitiva es un logaritmo; como $x^2 + 1 > 0$, no hace falta el valor absoluto. (1,5 puntos)

Resultados: 4, 1 y $\ln 2$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $4x - x^2 = x$, $x(3-x) = 0$: $x = 0$ y $x = 3$. Puntos $(0,0)$ y $(3,3)$. Se igualan las dos funciones y se resuelve la ecuación de segundo grado. (1 punto)
b. En $x = 1$: $f(1) = 3 > g(1) = 1$. La parábola, con vértice $(2,4)$, va por encima de la recta entre 0 y 3. La parábola abre hacia abajo y corta al eje X en 0 y 4; la recta $y = x$ es la bisectriz del primer cuadrante. (1 punto)
c. $\int_0^3 (3x - x^2)dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2} = 4{,}5$ unidades cuadradas. Se integra «función de arriba menos función de abajo»: $f(x) - g(x) = 3x - x^2$. (2 puntos)

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. $F(1) = \int_1^1 = 0$. Por el teorema fundamental, $F'(x) = x^2 - 4$. Si los límites de integración coinciden, la integral vale 0. El integrando es continuo, por lo que F es derivable. (1 punto)
b. $F'(x) = 0$ en $x = \pm 2$. $F''(x) = 2x$: $F''(-2) < 0$, máximo en $x = -2$; $F''(2) > 0$, mínimo en $x = 2$. F' es positiva fuera de $[-2, 2]$ y negativa dentro, lo que confirma un máximo y un mínimo. (1,5 puntos)
c. $F(x) = \left[\frac{t^3}{3} - 4t\right]_1^x = \frac{x^3}{3} - 4x + \frac{11}{3}$. Su derivada es $x^2 - 4$, como se esperaba. $F(-2) = 9$ y $F(2) = -\frac{5}{3}$. Detalle: $F(-2) = -\frac{8}{3} + 8 + \frac{11}{3} = 9$ y $F(2) = \frac{8}{3} - 8 + \frac{11}{3} = -\frac{5}{3}$. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. $V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx$. Cada sección perpendicular al eje X es un círculo de radio e^x y área πe^{2x}; el volumen es la integral de esas áreas entre 0 y 1. (1,5 puntos)

b. $V = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi(e^2-1)}{2} \approx 10{,}04$ unidades cúbicas. Una primitiva de e^{2x} es $\frac{e^{2x}}{2}$. Por Barrow, $\pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right)$; con $e^2 \approx 7{,}389$ resulta $\pi \cdot 3{,}1945 \approx 10{,}04$. (1,5 puntos)

c. $\int_0^1 e^x dx = e - 1 \approx 1{,}72$ unidades cuadradas. La función es positiva en $[0, 1]$, así que el área es directamente la integral, $e^1 - e^0$. (1 punto)

Observa que el volumen no es π por el área: hay que elevar al cuadrado el radio.

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. $20 - 2t = 0$, $t = 10$ s. El tren se detiene cuando su velocidad es nula. (0,5 puntos)

b. $\int_0^{10} (20 - 2t) dt = \left[20t - t^2 \right]_0^{10} = 200 - 100 = 100$ m (es el área del triángulo bajo la recta de velocidad). La distancia es la integral de la velocidad, positiva en $[0, 10]$. Comprobación con el triángulo de base 10 s y altura 20 m/s: $\frac{10 \cdot 20}{2} = 100$. (1,5 puntos)

c. $\int_0^6 (20 - 2t) dt = 120 - 36 = 84$ m. Detalle: $20 \cdot 6 - 6^2 = 120 - 36$. (1 punto)

d. No: necesita 100 m y solo tiene 95 m. Debería empezar a frenar antes o frenar con más intensidad. Le faltan 5 m: el tren rebasaría el final del andén. (1 punto)