Apuntes - Integral definida, áreas y volúmenes

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Actividad de introducción: ¿cuánta agua ha caído?

Durante una tormenta, el agua que entra en un depósito no llega a ritmo constante: al principio cae poca, después mucha y al final otra vez poca. Si conocieras el caudal en cada minuto, ¿cómo calcularías los litros recogidos? Una idea es dividir el tiempo en intervalos muy cortos, suponer que en cada uno el caudal es casi constante, multiplicar caudal por tiempo y sumar. Cuanto más cortos son los intervalos, mejor es la aproximación, y en el límite se obtiene el área bajo la gráfica del caudal. Esa área es la integral definida. Lo sorprendente es que no hace falta sumar infinitos rectángulos: la regla de Barrow permite calcularla con una primitiva. En este tema aprenderás a calcular integrales definidas, áreas de recintos planos limitados por curvas y volúmenes de cuerpos de revolución, y verás que la misma herramienta sirve para calcular distancias recorridas, energía producida o superficie de un terreno.

La integral definida

Definición: integral definida

Si $f \geq 0$ es continua en $[a, b]$, la **integral definida** $\int_a^b f(x)\,dx$ es el límite de las sumas de Riemann (suma de áreas de rectángulos de base Δx y altura $f(x_i)$) cuando el número de rectángulos tiende a infinito: es el **área bajo la curva**. Si f toma valores negativos, la integral da un área con signo.

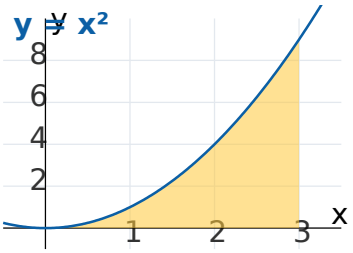


Figura: $\int_0^3 x^2\,dx$ es el área de la región sombreada.

Propiedades de la integral definida

- $\int_a^a f = 0$ y $\int_a^b f = -\int_b^a f$.
- Linealidad: $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
- Aditividad: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

- Si $f \geq g$ en $[a,b]$, $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.
- **Teorema del valor medio integral:** si f es continua, existe $c \in [a,b]$ con $\int_a^b f = f(c)(b-a)$.

Teorema fundamental del cálculo y regla de Barrow

Teorema fundamental del cálculo

Si f es continua en $[a,b]$, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y $F'(x) = f(x)$.
Regla de Barrow: si G es una primitiva de f, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

Si el límite superior es una función $g(x)$: $\dfrac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))\,g'(x)$ (regla de la cadena).

Ejemplo 1

$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx = \left[x^3 - x^2 + x\right]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0 = 6.$

Ejemplo 2

$G(x) = \int_1^{x^2} \ln t\,dt \Rightarrow G'(x) = \ln(x^2)\cdot 2x = 4x\ln x.$

Cálculo de áreas

Método: área de una región plana

1. Dibuja la región o halla los puntos de corte (igualando las funciones o con el eje).
2. Decide qué curva está por encima en cada tramo.
3. Calcula $\int (f_{\text{sup}} - f_{\text{inf}})\,dx$ en cada tramo con Barrow.
4. Suma las áreas, todas positivas, y escribe u^2.

Si f cambia de signo en $[a,b]$, el área entre la curva y el eje X es $\int_a^b |f|$: se parte la integral en los ceros de f y se toma el valor absoluto de cada trozo.

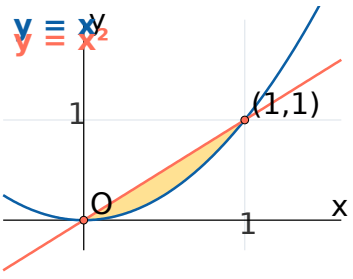


Figura: región limitada por $y = x$ e $y = x^2$, de área $\frac{1}{6}$.

Ejemplo 3

Área entre $y = x$ e $y = x^2$: cortes $x = 0, 1$. En $[0, 1]$, $x \geq x^2$.
$A = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ u².

Ejemplo 4

Área entre $y = x^3 - x$ y el eje X en $[-1, 1]$. Ceros: $-1, 0, 1$. $\int_{-1}^0 (x^3 - x)dx = \frac{1}{4}$ y $\int_0^1 (x^3 - x)dx = -\frac{1}{4}$. Área total $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ u² (no 0, que sería la integral con signo).

Volúmenes de revolución

Volumen de un sólido de revolución

El volumen que genera al girar alrededor del eje X la región bajo $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, es $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$. Si gira la región entre $f \geq g \geq 0$: $V = \pi \int_a^b \left(f^2 - g^2\right)dx$.

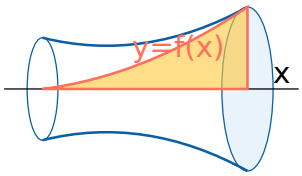


Figura: sólido de revolución generado al girar $y = f(x)$ alrededor del eje X.

Ejemplo 5

Cono: $y = \frac{r}{h}x$, $0 \leq x \leq h$. $V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

Ejemplo 6

Esfera: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$. $V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2)dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^r = \frac{4}{3}\pi r^3$.

¡Atención!

- Calcular $\int_a^b f$ con f que cambia de signo y llamar a eso «área».
- Restar mal las funciones: siempre la de arriba menos la de abajo.
- Olvidar el cuadrado en el volumen: es $\pi \int f^2$, no $(\pi \int f)^2$.
- No dar unidades (u², u³) en la respuesta.

Cómo se plantean estos problemas en la PAU

Observación

Lo más habitual es hallar el área de la región limitada por una parábola y una recta o por dos curvas, con un dibujo previo para decidir el orden. Se pide también calcular una integral definida mediante partes o fracciones simples (conecta con el tema anterior) y, con menos frecuencia, un volumen de revolución. Presenta la solución en este orden: puntos de corte, esbozo, planteamiento de la integral, primitiva y aplicación de Barrow, resultado en u². Una comprobación útil es estimar el área de forma aproximada con un rectángulo o un triángulo y ver que el valor tiene sentido.

Ejemplo 7

Área limitada por $y = \ln x$, el eje X y $x = e$. Corte con el eje en $x = 1$.
$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1$ u².

Método: área entre dos curvas

1. Halla los puntos de corte igualando las funciones.
2. Determina qué función queda por encima en cada intervalo.
3. Calcula $\int (f - g)\, dx$ con la regla de Barrow.
4. Da el área como valor positivo en u².

Estrategia para los problemas de áreas

Método: área de un recinto en cinco pasos

1. Dibuja un esbozo de las curvas: aunque sea aproximado, evita muchos errores de signo.
2. Calcula los puntos de corte de las curvas entre sí y, si interviene el eje X, los cortes con él.
3. En cada tramo entre dos cortes consecutivos, decide qué función va por encima evaluando en un punto intermedio.
4. Integra en cada tramo la función de arriba menos la de abajo.
5. Suma los resultados, que deben ser positivos, y da la respuesta con unidades cuadradas.

Ejemplo 8

Un parterre está limitado por $y = x^2 - 2x$ e $y = x + 4$. ¿Cuánto mide?

Las curvas se cortan donde $x^2 - 3x - 4 = 0$, es decir, en $x = -1$ y $x = 4$. Entre esos

valores la recta va por encima, como se comprueba en $x = 0$. El área es la integral de la diferencia, $-x^2 + 3x + 4$, entre -1 y 4, que vale $\frac{125}{6}$, unos 20,83 metros cuadrados. Con ese dato el jardinero calcula cuántas plantas y cuánta tierra necesita.

¡Atención!

La integral definida no es siempre un área: cuando la función es negativa, la integral es negativa, y si cambia de signo las partes se compensan. Por eso, antes de calcular un área, hay que buscar los cortes con el eje y separar los tramos. Otro error habitual es olvidar el número π en los volúmenes de revolución, o elevar al cuadrado mal la función: hay que elevar la función completa, no cada término por separado. Y en la regla de Barrow se resta siempre el valor en el límite inferior al valor en el límite superior, con cuidado con los signos negativos.

La integral como acumulación

Propiedad: integrar un ritmo da una cantidad total

Si una magnitud cambia con un ritmo conocido, la integral del ritmo entre dos instantes da el cambio total de la magnitud. La integral de la velocidad es la distancia recorrida, la del caudal es el volumen de agua, la de la potencia es la energía y la del coste marginal es el coste de producir un lote. Por eso la integral definida aparece en física, en economía y en ingeniería. Además, el valor medio de una función en un intervalo es la integral dividida entre la longitud del intervalo: es la altura del rectángulo que tiene la misma área que la región bajo la curva.

Ejemplo 9

Una instalación solar produce $P(t) = 3t - 0{,}25t^2$ kW durante 12 horas. ¿Cuánta energía produce?

La energía es la integral de la potencia: $\int_0^{12} (3t - 0{,}25t^2)\,dt = 216 - 144 = 72$ kWh. La potencia media es $\frac{72}{12} = 6$ kW, aunque a mediodía llegue a 9 kW. Con este cálculo el colegio puede saber si su instalación cubre el consumo diario y cuánta energía le sobra para vender.

Volúmenes de cuerpos de revolución en la práctica

Método: volumen de un cuerpo de revolución

1. Identifica la curva que, al girar alrededor del eje X, genera el cuerpo, y el intervalo en que lo hace.
2. Imagina el cuerpo cortado en rodajas muy finas perpendiculares al eje: cada rodaja es un cilindro de radio igual al valor de la función y de grosor muy pequeño.

3. Escribe la integral de π por el cuadrado de la función entre los extremos del intervalo.
4. Desarrolla el cuadrado antes de integrar y aprovecha las simetrías para simplificar.
5. Comprueba el resultado comparándolo con un cilindro o un cono conocidos: el volumen debe ser razonable.

Ejemplo 10

Un barril tiene el perfil $y = 3 - \frac{x^2}{16}$ entre $x = -4$ y $x = 4$ (dm). ¿Cuántos litros caben?

El volumen es π por la integral del cuadrado del perfil. Al desarrollar el cuadrado y usar la simetría se obtiene $57{,}6\pi$, unos 181 litros. Un cilindro con el radio máximo del barril y la misma longitud tendría 72π, unos 226 litros, así que el barril aprovecha el 80 % de ese cilindro. Los toneleros conocían este tipo de cálculo desde hace siglos: el astrónomo Johannes Kepler escribió un libro entero sobre cómo medir el vino de los toneles.

Observación: de Arquímedes a Riemann

Hace más de dos mil años, Arquímedes calculó el área de un segmento de parábola llenándolo con triángulos cada vez más pequeños, una idea muy parecida a la de las sumas que hoy definen la integral. En el siglo XVII, Isaac Barrow, profesor de Newton, descubrió la relación entre las tangentes y las áreas, y Newton y Leibniz la convirtieron en el teorema fundamental del cálculo. Ya en el siglo XIX, Bernhard Riemann dio la definición rigurosa de integral que se usa en la universidad. Hoy los ordenadores calculan integrales que no tienen primitiva sumando millones de rectángulos en una fracción de segundo.

El consejo de Otto

Antes de integrar, dibuja. Una parábola y una recta ya te dicen cuántos cortes hay y cuál función va por encima, y así evitas áreas negativas.