Ejercicios - Integral definida, áreas y volúmenes

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – La regla de Barrow

Si F es una primitiva de f continua en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Calcula:

a. $\int_1^3 (2x + 1)\,dx$
b. $\int_0^\pi \sin x\,dx$
c. $\int_0^1 e^{2x}\,dx$
d. $\int_1^e \frac{dx}{x}$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Propiedades de la integral definida

Se sabe que $\int_0^2 f(x)\,dx = 5$, $\int_2^5 f(x)\,dx = -1$ y $\int_0^2 g(x)\,dx = 3$.

a. Calcula $\int_0^5 f(x)\,dx$.
b. Calcula $\int_2^0 f(x)\,dx$.
c. Calcula $\int_0^2 (2f(x) - 3g(x))dx$.
d. Calcula $\int_{-2}^2 x^3\,dx$ sin hacer cuentas y explica por qué.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Área bajo una curva positiva

Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, el área del recinto limitado por la gráfica, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b f(x)\,dx$. Se considera $f(x) = x^2 + 1$ en $[0, 2]$.

a. Comprueba que f es positiva en el intervalo.
b. Calcula el área.

c. Compara con el área del rectángulo de base 2 y altura $f(2)$ e interpreta la diferencia.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Área cuando la función cambia de signo

Se quiere calcular el área del recinto limitado por $f(x) = x^2 - 4$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

a. Halla dónde corta f al eje X en el intervalo.
b. Calcula la integral en cada tramo.
c. Calcula el área total.
d. Calcula $\int_0^3 f(x)\,dx$ y explica por qué no es el área.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Área entre dos curvas

El área entre dos curvas es $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$, donde f es la que va por encima y a, b son los puntos de corte. Se consideran $y = x^2$ e $y = 2x$.

a. Halla los puntos de corte.
b. Decide cuál va por encima.
c. Calcula el área del recinto que encierran.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Dos curvas que se cortan tres veces

Se consideran $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$.

a. Halla los puntos de corte.
b. Estudia cuál va por encima en cada tramo.
c. Calcula el área total encerrada.
d. ¿Se podía haber usado la simetría? Explica cómo.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – El teorema fundamental del cálculo

Si f es continua, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y $F'(x) = f(x)$. Si el límite superior es $u(x)$, por la regla de la cadena $F'(x) = f(u(x))\,u'(x)$.

a. Deriva $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$.

b. Deriva $G(x) = \int_1^{x^2} \ln t \, dt$.

c. Halla los extremos relativos de $H(x) = \int_0^x (t-1)(t-3)\, dt$ sin calcular la integral.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Volumen de un sólido de revolución

Al girar alrededor del eje X la región bajo $y = f(x)$ en $[a, b]$ se obtiene un sólido de volumen $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$.

a. Calcula el volumen al girar $y = \sqrt{x}$ en $[0, 4]$.
b. Calcula el volumen al girar $y = \frac{x}{2}$ en $[0, 6]$ y comprueba que es un cono.
c. Deduce la fórmula del volumen de la esfera girando $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ en $[-r, r]$.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – La distancia recorrida por un coche

Un coche eléctrico en un circuito de pruebas de Navarra parte del reposo y su velocidad (m/s) durante 12 segundos es $v(t) = 12t - t^2$. La distancia recorrida es la integral de la velocidad.

a. Comprueba que la velocidad es positiva en $(0, 12)$ y que se detiene en $t = 12$.
b. Calcula la distancia recorrida en los 12 segundos.
c. ¿Qué distancia recorre en los 6 primeros segundos? ¿Y en los 6 últimos?
d. Calcula la velocidad media.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – La lluvia en el depósito

Durante una tormenta en Galicia, el agua que cae sobre un tejado entra en un depósito con un caudal $q(t) = 0{,}5t(10 - t)$ litros por minuto, durante los 10 minutos que dura el chaparrón.

a. ¿En qué minuto el caudal es máximo? ¿Cuánto vale?
b. Calcula los litros recogidos en total.
c. ¿Cuántos litros entran en los 5 primeros minutos?
d. Si el depósito tenía 40 L y su capacidad es de 120 L, ¿se desborda?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – La energía de las placas solares

La instalación solar de un colegio de Murcia produce una potencia $P(t) = 3t - 0{,}25t^2$

kW, donde t son las horas desde las 7:00, entre $t = 0$ y $t = 12$. La energía producida (kWh) es la integral de la potencia.

a. ¿A qué hora la potencia es máxima? ¿Cuánto vale?
b. Calcula la energía producida en todo el día.
c. Calcula la energía producida entre las 9:00 y las 13:00.
d. Si el colegio consume 60 kWh al día y vende el sobrante a 0,08 € el kWh, ¿cuánto ingresa?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – La parcela junto al río

Una finca de Extremadura está limitada por un camino recto (el eje X) y por la orilla de un río que sigue la curva $y = 2x - \frac{x^2}{50}$ (metros), entre los puntos en que la orilla toca el camino.

a. Halla los puntos en que la orilla corta al camino.
b. Calcula la superficie de la finca.
c. ¿A qué distancia máxima del camino llega el río?
d. Si la hectárea (10 000 m²) se vende a 9 000 €, ¿cuánto vale la finca?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – El volumen de un barril

Una bodega de La Rioja encarga barriles cuyo perfil, al girar alrededor del eje X, es $y = 3 - \frac{x^2}{16}$ para $-4 \le x \le 4$ (decímetros).

a. Calcula el radio de las tapas y el radio máximo del barril.
b. Plantea la integral del volumen.
c. Calcula el volumen en litros (1 dm³ = 1 L).
d. Compara con un cilindro de radio 3 dm y la misma longitud.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – La temperatura media del día

El valor medio de una función continua en $[a, b]$ es $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ (teorema del valor medio integral). En un día de otoño en Burgos, la temperatura es $T(t) = 12 + 8\sin\left(\frac{\pi(t-9)}{12}\right)$ °C, con t en horas.

a. Calcula la temperatura máxima y la mínima y a qué hora se alcanzan.
b. Calcula la temperatura media entre las 0 h y las 24 h.
c. Calcula la temperatura media entre las 9 h y las 21 h.
d. Explica por qué la media del día completo coincide con 12.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: el parterre del parque

Un jardinero de un parque de Valencia diseña un parterre de flores limitado por la parábola $y = x^2 - 2x$ y la recta $y = x + 4$ (metros). Para comprar plantas y tierra necesita la superficie. Cada metro cuadrado necesita 9 plantas de flor, que cuestan 1,20 € cada una.

a. Halla los puntos de corte de la parábola y la recta.
b. Determina qué función va por encima.
c. Calcula la superficie del parterre.
d. Calcula cuántas plantas hacen falta y su coste.
e. ¿Cuál es la anchura máxima del parterre en dirección vertical? ¿En qué valor de x ?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: el área entre una curva y su tangente

Se considera la parábola $f(x) = x^2$. En la PAU es frecuente pedir el área del recinto limitado por una curva, una de sus tangentes y un eje.

a. Halla la recta tangente a la parábola en $x = 1$.
b. Comprueba que la parábola va siempre por encima de esa tangente.
c. Calcula el área del recinto limitado por la parábola, la tangente y el eje Y.
d. Dibuja el recinto indicando sus vértices.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: la sección del túnel

La sección de un túnel ferroviario de los Pirineos tiene forma parabólica: está limitada por el suelo (eje X) y la curva $y = ax - x^2$ (metros), con $a > 0$. Por normativa, la sección debe tener 36 m² para que quepan los trenes y la ventilación.

a. Halla los puntos donde la curva corta al suelo, en función de a.
b. Calcula el área de la sección en función de a.
c. Halla a para que el área sea 36 m².
d. Calcula la anchura y la altura del túnel.
e. ¿Cabe un tren de 3,2 m de ancho y 4,5 m de alto centrado en el túnel?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: el balón de rugby

Un fabricante de material deportivo modeliza un balón de rugby como el sólido que se obtiene al girar alrededor del eje X la semielipse $y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$, $-5 \le x \le 5$

(centímetros, a escala 1:2).

a. ¿Cuál es la longitud y el diámetro máximo del modelo?
b. Plantea y calcula el volumen del modelo.
c. Compara con una esfera del mismo diámetro máximo.
d. El balón real mide el doble en cada dirección. ¿Cuál es su volumen?
e. ¿Cuánto aire, en litros, contiene el balón real?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: dividir un recinto en dos partes iguales

Una piscina de un hotel de Ibiza tiene, vista desde arriba, la forma del recinto limitado por $y = x^2$ y la recta $y = 4$ (decámetros). Se quiere separar con una corchera horizontal $y = k$ una zona infantil (la de abajo) que tenga exactamente la mitad de la superficie.

a. Calcula la superficie total de la piscina.
b. Calcula, en función de k, el área de la zona situada por debajo de $y = k$.
c. Halla k.
d. Calcula la longitud de la corchera.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: un límite con una integral

Para ir más allá. Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \sin(t^2)\, dt}{x^3}$, aunque la integral no se pueda calcular con primitivas elementales.

a. Comprueba que el límite es una indeterminación $\frac{0}{0}$.
b. Aplica la regla de L'Hôpital usando el teorema fundamental del cálculo.
c. Termina el cálculo.