Soluciones - Integral definida, áreas y volúmenes

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

Para aplicar la regla de Barrow se busca primero una primitiva cualquiera del integrando, sin necesidad de la constante, porque se anula al restar. Después se evalúa en el límite superior, se evalúa en el inferior y se restan los dos valores en ese orden.

a. Una primitiva es $x^2 + x$. $(9 + 3) - (1 + 1) = 12 - 2 = 10$.
b. Una primitiva es $-\cos x$. $-\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$.
c. Una primitiva es $\frac{e^{2x}}{2}$. $\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2} \approx 3{,}19$.
d. Una primitiva es $\ln x$. $\ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$.

Solución del ejercicio 2

Se usan las propiedades de la integral definida: la aditividad respecto del intervalo, el cambio de signo al intercambiar los límites y la linealidad. Además, una función impar integrada en un intervalo simétrico da siempre cero.

a. Por la aditividad respecto del intervalo: $5 + (-1) = 4$.
b. Al cambiar los límites cambia el signo: -5.
c. Por la linealidad: $2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 10 - 9 = 1$.
d. x^3 es impar y el intervalo es simétrico: las áreas a cada lado del origen son iguales y de signo contrario, así que la integral vale 0.

Solución del ejercicio 3

Como la función es positiva en todo el intervalo, el área coincide con la integral definida. Basta calcular una primitiva y aplicar la regla de Barrow entre los extremos del intervalo.

a. $x^2 \geq 0$, así que $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.
b. $\int_0^2 (x^2 + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3} \approx 4{,}67$ unidades cuadradas.
c. El rectángulo mide $2 \cdot 5 = 10$, mucho más, porque la parábola queda por debajo de la altura máxima en casi todo el intervalo.

Solución del ejercicio 4

Cuando la función cambia de signo, la integral en todo el intervalo no es el área,

porque las partes bajo el eje restan. Se buscan los cortes con el eje, se integra en cada tramo y se suman los valores absolutos.

a. $x^2 - 4 = 0$ en $x = 2$ (la raíz -2 queda fuera). f en $(0, 2)$ y $f > 0$ en $(2, 3)$.
b. $\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 8 = -\frac{16}{3}$ y $\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3 = (9 - 12) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{7}{3}$.
c. [redacted].
d. $\int_0^3 = -\frac{16}{3} + \frac{7}{3} = -3$: las partes bajo el eje restan, por eso hay que separar los tramos y tomar valores absolutos.

Solución del ejercicio 5

Para el área entre dos curvas se igualan sus expresiones para hallar los puntos de corte, que son los límites de integración. Se integra la función de arriba menos la de abajo, comprobando cuál va por encima con un punto intermedio.

a. $x^2 = 2x$, $x(x - 2) = 0$: $x = 0$ y $x = 2$. Puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$.
b. En $x = 1$: $2x = 2 > x^2 = 1$. La recta va por encima.
c. $\int_0^2 (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

Solución del ejercicio 6

Si las curvas se cortan en más de dos puntos, el recinto se divide en varias partes y en cada una puede ir por encima una curva distinta. Se calcula cada área por separado y se suman.

a. $x^3 = x$, $x(x - 1)(x + 1) = 0$: $x = -1, 0, 1$.
b. En $(-1, 0)$, por ejemplo en $-\frac{1}{2}$: $-\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$, va por encima x^3. En $(0, 1)$ va por encima x.
c. $\int_{-1}^0 (x^3 - x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{4}$ y $\int_0^1 (x - x^3)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Total $\frac{1}{2}$.
d. Las dos funciones son impares: los dos recintos son simétricos respecto del origen y basta calcular uno y multiplicar por 2.

Solución del ejercicio 7

El teorema fundamental del cálculo dice que la derivada de una función integral es el integrando evaluado en el límite superior. Si ese límite es una función de x, se multiplica además por su derivada, por la regla de la cadena.

a. $F'(x) = e^{x^2}$, aunque esa integral no tiene primitiva elemental.
b. $G'(x) = \ln(x^2) \cdot 2x = 4x \ln x$ para $x > 0$.
c. $H'(x) = (x - 1)(x - 3)$: positiva antes de 1, negativa entre 1 y 3 y positiva después. Máximo relativo en $x = 1$ y mínimo relativo en $x = 3$.

Solución del ejercicio 8

El volumen de revolución se obtiene sumando discos muy finos de radio igual al valor de la función: cada disco tiene volumen pi por radio al cuadrado por grosor. Por eso se integra el cuadrado de la función y se multiplica por pi.

a. $\pi \int_0^4 x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi \approx 25{,}13$ unidades cúbicas.
b. $\pi \int_0^6 \frac{x^2}{4}dx = \pi\frac{216}{12} = 18\pi$. Es un cono de radio 3 y altura 6: $\frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 6 = 18\pi$.
c. $\pi \int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)dx = \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi\left(2r^3 - \frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Solución del ejercicio 9

La distancia recorrida es la integral de la velocidad, porque la velocidad es la derivada de la posición. Como la velocidad es positiva en todo el intervalo, la integral da directamente la distancia.

a. $v(t) = t(12-t) > 0$ si 0 y $v(12) = 0$.
b. $\int_0^{12}(12t - t^2)dt = \left[6t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^{12} = 864 - 576 = 288$ m.
c. $\int_0^6 = 216 - 72 = 144$ m, y los otros 144 m en los 6 últimos: la gráfica es simétrica respecto de $t = 6$.
d. $\frac{288}{12} = 24$ m/s, que es el valor medio de la velocidad.

Solución del ejercicio 10

El volumen de agua recogido es la integral del caudal a lo largo del tiempo. La simetría de la parábola del caudal respecto de su vértice permite comprobar el resultado de la mitad del intervalo.

a. $q'(t) = 0{,}5(10 - 2t) = 0$ en $t = 5$; $q(5) = 12{,}5$ L/min.
b. $\int_0^{10}(5t - 0{,}5t^2)dt = \left[2{,}5t^2 - \frac{t^3}{6}\right]_0^{10} = 250 - \frac{1\,000}{6} \approx 83{,}33$ L.
c. La mitad, por simetría: $\approx 41{,}67$ L. Directamente: $62{,}5 - \frac{125}{6} \approx 41{,}67$ L.
d. $40 + 83{,}33 \approx 123{,}33$ L : no se desborda.

Solución del ejercicio 11

La energía es la integral de la potencia en el tiempo. El máximo de la potencia se obtiene derivando, y la energía de un intervalo de horas se calcula con la regla de Barrow entre los instantes correspondientes.

a. $P'(t) = 3 - 0{,}5t = 0$ en $t = 6$: a las 13:00, con $P(6) = 18 - 9 = 9$ kW.
b. $\int_0^{12}(3t - 0{,}25t^2)dt = \left[1{,}5t^2 - \frac{t^3}{12}\right]_0^{12} = 216 - 144 = 72$ kWh.

c. De $t = 2$ a $t = 6$: $(54 - 18) - \left(6 - \frac{2}{3}\right) = 36 - \frac{16}{3} \approx 30{,}67$ kWh.
d. Sobran $72 - 60 = 12$ kWh: $12 \cdot 0{,}08 = 0{,}96$ € al día.

Solución del ejercicio 12

La superficie de la finca es el área bajo la curva de la orilla entre los dos puntos donde toca al camino. Estos puntos se obtienen igualando la función a cero, y el resultado se convierte en hectáreas para calcular el precio.

a. $2x - \frac{x^2}{50} = 0$, $x\left(2 - \frac{x}{50}\right) = 0$: $x = 0$ y $x = 100$ m.
b. $\int_0^{100} \left(2x - \frac{x^2}{50}\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{150}\right]_0^{100} = 10\,000 - \frac{1\,000\,000}{150} \approx 3333{,}3$ m².
c. El máximo está en $x = 50$: $y = 100 - 50 = 50$ m.
d. $\frac{3333{,}3}{10\,000} \cdot 9\,000 \approx 3000$ €.

Solución del ejercicio 13

El barril es un sólido de revolución, así que su volumen se calcula integrando pi por el cuadrado del perfil. Como el perfil es simétrico respecto del eje vertical, basta integrar de 0 a 4 y multiplicar por 2.

a. Tapas: $y(4) = 3 - 1 = 2$ dm. Máximo en $x = 0$: 3 dm.
b. $V = \pi \int_{-4}^{4} \left(3 - \frac{x^2}{16}\right)^2 dx = \pi \int_{-4}^{4} \left(9 - \frac{3x^2}{8} + \frac{x^4}{256}\right) dx$.
c. Por simetría, $2\pi\left[9x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{1\,280}\right]_0^4 = 2\pi\,(36 - 8 + 0{,}8) = 57{,}6\pi \approx 181{,}0$ L.
d. Cilindro: $\pi \cdot 9 \cdot 8 = 72\pi \approx 226{,}2$ L. El barril tiene el 80 % de ese volumen.

Solución del ejercicio 14

El valor medio de una función continua en un intervalo es su integral dividida entre la longitud del intervalo. La integral de un seno en un periodo completo es cero, lo que simplifica el cálculo de la media diaria.

a. El seno vale 1 cuando $\frac{\pi(t-9)}{12} = \frac{\pi}{2}$, $t = 15$: máxima de 20 °C a las 15 h. Vale -1 en $t = 3$: mínima de 4 °C a las 3 h.
b. $\frac{1}{24}\int_0^{24} T\,dt = \frac{1}{24}(288 + 0) = 12$ °C, porque la integral del seno en un periodo completo es 0.
c. $\frac{1}{12}\int_9^{21} T\,dt = 12 + \frac{8}{12} \cdot \frac{12}{\pi}[-\cos u]_0^{\pi} = 12 + \frac{16}{\pi} \approx 17{,}09$ °C.
d. Un periodo completo del seno tiene tanta área por encima del eje como por debajo, así que solo queda el término constante.

Solución del ejercicio 15

Se hallan los cortes entre la parábola y la recta, se comprueba cuál va por encima y se integra la diferencia. El área obtenida se multiplica por la densidad de plantación para calcular el número de plantas.

a. $x^2 - 2x = x + 4$, $x^2 - 3x - 4 = 0$, $(x-4)(x+1) = 0$: $x = -1$ y $x = 4$. Puntos $(-1, 3)$ y $(4, 8)$.
b. En $x = 0$: la recta vale 4 y la parábola 0. Va por encima la recta.
c. $\int_{-1}^{4} \left(x + 4 - x^2 + 2x\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{4} = \frac{56}{3} - \left(-\frac{13}{6}\right) = \frac{125}{6} \approx 20{,}83$ m².
d. $20{,}83 \cdot 9 \approx 187{,}5$, es decir, 188 plantas, que cuestan $188 \cdot 1{,}20 = 225{,}60$ €.
e. La diferencia $-x^2 + 3x + 4$ es máxima en $x = 1{,}5$: $-2{,}25 + 4{,}5 + 4 = 6{,}25$ m.

Solución del ejercicio 16

La tangente se escribe con la derivada en el punto. Al restar la tangente de la parábola aparece un cuadrado perfecto, lo que demuestra que la parábola queda por encima, y el área se integra entre el eje Y y el punto de tangencia.

a. $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$: $y = 2x - 1$.
b. $x^2 - (2x - 1) = (x-1)^2 \geq 0$, con igualdad solo en $x = 1$.
c. Entre $x = 0$ y $x = 1$: $\int_0^1 (x-1)^2 dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.
d. Es un triángulo curvilíneo de vértices $(0, 0)$, $(0, -1)$ y $(1, 1)$: la parábola une $(0, 0)$ con $(1, 1)$, la tangente une $(0, -1)$ con $(1, 1)$ y el eje Y cierra el recinto.

Solución del ejercicio 17

Se deja el área en función del parámetro integrando entre los dos puntos de corte con el suelo. Igualando al valor exigido se obtiene una ecuación cúbica sencilla, y con la anchura se comprueba si cabe el tren.

a. $x(a - x) = 0$: $x = 0$ y $x = a$.
b. $\int_0^a (ax - x^2) dx = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$.
c. $\frac{a^3}{6} = 36$, $a^3 = 216$, $a = 6$ m.
d. Anchura 6 m; altura máxima en $x = 3$: $18 - 9 = 9$ m.
e. Centrado, ocupa de $x = 1{,}4$ a $x = 4{,}6$. En los bordes la altura del túnel es $6 \cdot 1{,}4 - 1{,}4^2 = 8{,}4 - 1{,}96 = 6{,}44$ m $> 4{,}5$: cabe con holgura.

Solución del ejercicio 18

El volumen se calcula girando la semielipse alrededor del eje X con la fórmula de los discos. Para escalar un sólido hay que tener en cuenta que el volumen se multiplica por el cubo del factor de escala.

a. Longitud 10 cm y diámetro máximo $2 \cdot 3 = 6$ cm.
b. $V = \pi \int_{-5}^{5} 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)dx = 9\pi\left[x - \frac{x^3}{75}\right]_{-5}^{5} = 9\pi\left(10 - \frac{250}{75}\right) = 60\pi \approx 188{,}5$ cm³.
c. Esfera de radio 3: $\frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi$. El balón tiene $\frac{60}{36} \approx 1{,}67$ veces más volumen.
d. Al duplicar cada dimensión el volumen se multiplica por $2^3 = 8$: $480\pi \approx 1508$ cm³.
e. Unos $1{,}51$ litros.

Solución del ejercicio 19

Se calcula primero el área total y después el área de la parte inferior en función de la altura de la corchera. Igualando esa área a la mitad del total se obtiene la altura buscada.

a. Cortes en $x = \pm 2$. $\int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$ dam².
b. Cortes en $x = \pm\sqrt{k}$: $\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}(k - x^2)dx = 2\left(k\sqrt{k} - \frac{k\sqrt{k}}{3}\right) = \frac{4}{3}k^{3/2}$.
c. $\frac{4}{3}k^{3/2} = \frac{16}{3}$, $k^{3/2} = 4$, $k = 4^{2/3} \approx 2{,}520$ dam.
d. Va de $-\sqrt{k}$ a $\sqrt{k}$: $2\sqrt{2{,}520} \approx 3{,}17$ dam, unos 31,7 m.

Solución del ejercicio 20

El límite es una indeterminación cero entre cero, así que se aplica la regla de L'Hôpital. La derivada del numerador se obtiene con el teorema fundamental del cálculo, sin necesidad de calcular la integral.

a. En $x = 0$ la integral va de 0 a 0 y vale 0, y el denominador también es 0.
b. La derivada del numerador es $\sin(x^2)$ y la del denominador $3x^2$: el límite es el de $\dfrac{\sin(x^2)}{3x^2}$.
c. Como $\dfrac{\sin u}{u} \to 1$ cuando $u \to 0$, el límite es $\dfrac{1}{3}$.