Soluciones del examen - Distribuciones binomial y normal

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · Duración: 60 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. $\mu = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}3 = 1{,}1$ lámparas. La media de una variable discreta es la suma de cada valor por su probabilidad. Las probabilidades suman $0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}3 = 1$, así que la tabla es correcta. (1 punto)

b. $\sum x_i^2 p_i = 0 + 0{,}5 + 1{,}2 = 1{,}7$; $\sigma^2 = 1{,}7 - 1{,}21 = 0{,}49$ y $\sigma = 0{,}7$. Se usa $\sigma^2 = \sum x_i^2 p_i - \mu^2$, con $\sum x_i^2 p_i = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}3$. (1,5 puntos)

c. $40 \cdot 1{,}1 = 44$ € al día; $25 \cdot 44 = 1\,100$ € al mes. La ganancia es $G = 40X$, por lo que su media es 40μ; en un mes se suman 25 días con la misma media. La desviación de la ganancia diaria sería $40 \cdot 0{,}7 = 28$ €. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. Cada cliente paga o no con el móvil, con probabilidad constante 0,4 y de forma independiente: $X \sim B(6;\, 0{,}4)$. Hay un número fijo de pruebas, $n = 6$, dos resultados posibles en cada una y probabilidad de éxito $p = 0{,}4$. (1 punto)

b. $\binom{6}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^4 = 15 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}1296 \approx 0{,}3110$. $\binom{6}{2} = 15$ cuenta las formas de elegir los dos clientes que pagan con el móvil; $0{,}6^4$ es la probabilidad de que los otros cuatro no lo hagan. (1 punto)

c. $1 - 0{,}6^6 \approx 0{,}9533$. Se usa el suceso contrario: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$, con $P(X = 0) = 0{,}6^6 \approx 0{,}0467$. (1 punto)

d. $\mu = 6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$ y $\sigma = \sqrt{6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$. La varianza es $npq = 1{,}44$. Por término medio, entre 2 y 3 clientes de cada 6 pagan con el móvil. (1 punto)

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. $Z = \frac{20-15}{4} = 1{,}25$: $1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$, un 10,56 %. Se tipifica restando la media y dividiendo entre la desviación; la tabla da el área a la izquierda, así que se toma el complementario. (1,25 puntos)

b. Z entre -1 y $1{,}5$: $0{,}9332 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}7745$, un 77,45 %. Se tipifican los extremos: $\frac{11-15}{4} = -1$ y $\frac{21-15}{4} = 1{,}5$. Se calcula $\Phi(1{,}5) - \Phi(-1)$, usando $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$. (1,5 puntos)

c. $Z = \frac{10-15}{4} = -1{,}25$: $P = 0{,}1056$; $30 \cdot 0{,}1056 \approx 3{,}2$, unos 3 alumnos. El número esperado es $n \cdot p$, y se redondea a un número entero de alumnos. (1,25 puntos)

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. $P(Z \leq z) = 0{,}95$, $z \approx 1{,}645$: $120 + 1{,}645 \cdot 12 \approx 139{,}74$ min. Se busca en la tabla el z que deja un área de 0,95 a su izquierda y se destipifica con $x = \mu + z\sigma$. (1,5 puntos)

b. También $z = 1{,}645$ (5 % a cada lado): $120 \pm 19{,}74$, entre $100{,}26$ y $139{,}74$ min. Si el intervalo central contiene el 90 %, queda fuera un 10 %, repartido en un 5 % por cada lado; el radio es $1{,}645 \cdot 12 \approx 19{,}74$. (1,5 puntos)

c. $Z = \frac{100-120}{12} \approx -1{,}67$: $1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$. Por simetría, $\Phi(-1{,}67) = 1 - \Phi(1{,}67)$. Menos del 5 % de los conciertos dura menos de 100 minutos. (1 punto)

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. $X \sim B(300;\, 0{,}3)$: $\mu = 90$ y $\sigma = \sqrt{63} \approx 7{,}94$. Media $np = 300 \cdot 0{,}3 = 90$ y varianza $npq = 300 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 63$. (1 punto)

b. $np = 90 > 5$ y $n(1-p) = 210 > 5$. Como n es grande y np y nq superan 5, la binomial se aproxima por $N(90;\, 7{,}94)$. (0,5 puntos)

c. $P(X \geq 101) \approx P(Y > 100{,}5)$: $Z = \frac{10{,}5}{7{,}94} \approx 1{,}32$, $1 - 0{,}9066 = 0{,}0934$. «Más de 100» significa 101 o más; con la corrección de continuidad se usa 100,5. (1,5 puntos)

d. $P(79{,}5 < Y < 100{,}5)$: Z entre $-1{,}32$ y $1{,}32$, $2 \cdot 0{,}9066 - 1 = 0{,}8132$. Al incluir 80 y 100 se amplía media unidad por cada lado: 79,5 y 100,5, simétricos respecto de 90. (1 punto)

Conclusión: hay un 9 % de probabilidad de superar los 100 usuarios diarios y un 81 % de estar entre 80 y 100.