Ejercicios - Distribuciones binomial y normal

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Una variable aleatoria discreta

Una variable aleatoria discreta X toma los valores de la tabla. Su media es $\mu = \sum x_i p_i$ y su varianza $\sigma^2 = \sum x_i^2 p_i - \mu^2$.

x	0	1	2	3
P(X = x)	0,1	0,3	0,4	0,2

a. Comprueba que la tabla define una distribución de probabilidad.
b. Calcula $P(X \geq 2)$.
c. Calcula la media μ.
d. Calcula la varianza y la desviación típica.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – ¿Es justo el juego?

En la feria de un pueblo de Cuenca se propone un juego: se lanza un dado; si sale 6 se ganan 5 €, si sale 4 o 5 se gana 1 € y si sale 1, 2 o 3 se pierden 2 €. Sea X la ganancia.

a. Escribe la distribución de probabilidad de X.
b. Calcula la ganancia esperada $E(X)$.
c. ¿Es un juego justo? ¿A quién favorece?
d. ¿Cuánto debería pagarse al sacar un 6 para que el juego fuera justo?

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – La distribución binomial

Una variable sigue una binomial $B(n, p)$ si cuenta los éxitos en n pruebas independientes con la misma probabilidad de éxito p: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, con media np y desviación típica $\sqrt{np(1-p)}$. Sea $X \sim B(5;\, 0{,}3)$.

a. Calcula $P(X = 2)$.
b. Calcula $P(X \leq 1)$.
c. Calcula $P(X \geq 2)$.
d. Calcula la media y la desviación típica.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Al menos un éxito

El 10 % de los envases de un lote tiene un defecto en la etiqueta. Se eligen 10 envases al azar (se supone independencia). Sea X el número de envases defectuosos.

a. Justifica que X sigue una binomial e indica sus parámetros.
b. Calcula la probabilidad de que ninguno sea defectuoso.
c. Calcula la probabilidad de que al menos uno sea defectuoso.
d. Calcula la probabilidad de que haya exactamente dos defectuosos.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – La normal tipificada y su tabla

La variable $Z \sim N(0,1)$ tiene la tabla de la función de distribución $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ para $z \geq 0$. Para valores negativos se usa la simetría: $P(Z \leq -z) = 1 - P(Z \leq z)$.

a. Calcula $P(Z \leq 1{,}25)$.
b. Calcula $P(Z > 0{,}6)$.
c. Calcula $P(-1$.
d. Halla k tal que $P(Z \leq k) = 0{,}975$.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Probabilidades con una normal cualquiera

Para calcular probabilidades con $X \sim N(\mu, \sigma)$ se tipifica: $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. Sea $X \sim N(50, 8)$.

a. Calcula $P(X$.
b. Calcula $P(X > 40)$.
c. Calcula $P(46$.
d. ¿Qué porcentaje de valores está a más de dos desviaciones típicas de la media?

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – El problema inverso: percentiles

Para hallar un valor a con $P(X \leq a)$ conocida, se busca el valor z en la tabla y se deshace la tipificación: $a = \mu + z\sigma$. La estatura de los chicos de 18 años de una región sigue una $N(176, 7)$ en cm.

a. Halla la estatura que solo supera el 10 % de los chicos (percentil 90).
b. Halla la estatura por debajo de la cual está el 25 % de los chicos.
c. Halla un intervalo centrado en la media que contenga al 95 % de los chicos.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Los tiros libres

Un jugador de un equipo de baloncesto de Gran Canaria encesta el 75 % de sus tiros libres. En un partido lanza 8 tiros libres. Sea X el número de canastas.

a. Indica la distribución de X y su media.
b. Calcula la probabilidad de que enceste los 8.
c. Calcula la probabilidad de que enceste al menos 6.
d. ¿Cuál es el número de canastas más probable?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Las semillas del invernadero

Una empresa de semillas de Almería garantiza que el 90 % de sus semillas de tomate germinan. Un agricultor siembra una bandeja de 20 semillas.

a. ¿Cuántas semillas espera que germinen? ¿Con qué desviación típica?
b. Calcula la probabilidad de que germinen todas.
c. Calcula la probabilidad de que germinen al menos 18.
d. Si germinan solo 14, ¿tiene motivos para dudar de la garantía? Calcula $P(X \leq 14)$.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – El peso de las barras de pan

En una panadería de Valladolid, el peso de las barras sigue una distribución $N(250, 10)$, en gramos. La normativa considera aceptable una barra de al menos 235 g.

a. ¿Qué porcentaje de barras pesa menos de 235 g?
b. ¿Qué porcentaje pesa entre 240 y 260 g?
c. De 300 barras diarias, ¿cuántas se espera que pesen más de 270 g?
d. ¿Qué peso supera solo el 5 % de las barras más pesadas?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Las notas de la PAU

En una convocatoria de la PAU de una comunidad autónoma, la nota de la fase general sigue aproximadamente una $N(6{,}5;\ 1{,}5)$.

a. ¿Qué porcentaje de estudiantes aprueba (nota de al menos 5)?
b. ¿Qué porcentaje saca más de 9?
c. Una carrera solo admite al 15 % con mejor nota. ¿Cuál es la nota de corte?
d. Si se presentan 12 000 estudiantes, ¿cuántos sacan entre 6 y 8?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – El autobús al trabajo

Marta va al trabajo en un autobús urbano de Bilbao. La duración del trayecto sigue una $N(35, 5)$ en minutos. Entra a trabajar a las 9:00.

a. Si sale a las 8:20, ¿qué probabilidad tiene de llegar tarde?
b. ¿A qué hora debe salir para llegar a tiempo con una probabilidad del 99 %?
c. En 20 días laborables, ¿cuántos días se espera que llegue tarde si sale a las 8:20?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – La regla 68-95-99,7 en el gimnasio

En un gimnasio de Madrid se mide el tiempo que tardan los socios en recorrer 1 km en la cinta, que sigue una $N(6;\ 0{,}5)$ en minutos. En una normal, aproximadamente el 68 %, el 95 % y el 99,7 % de los datos están a menos de 1, 2 y 3 desviaciones típicas de la media.

a. ¿Entre qué tiempos está el 68 % central de los socios?
b. ¿Entre qué tiempos está el 95 %?
c. ¿Qué porcentaje tarda más de 7 minutos?
d. Un socio tarda 4,4 minutos. ¿Es un tiempo excepcional? Razona.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – La batería del móvil

Un fabricante de teléfonos estima que la vida útil de sus baterías sigue una $N(800, 50)$ en días. Ofrece una garantía de 700 días: si la batería se estropea antes, la cambia gratis.

a. ¿Qué porcentaje de baterías habrá que cambiar?
b. De 50 000 teléfonos vendidos, ¿cuántas baterías espera cambiar?
c. ¿Qué garantía debería ofrecer para cambiar solo el 1 % de las baterías?
d. ¿Qué probabilidad hay de que una batería dure más de 900 días?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: piezas defectuosas en un pedido

Una fábrica de piezas de automóvil de Vigo sabe que el 5 % de sus piezas sale con algún defecto. Un cliente recibe un pedido de 400 piezas y lo devuelve si hay más de 25 defectuosas. Calcular la probabilidad exacta con la binomial supondría sumar muchos términos, así que se usa la aproximación normal.

a. Indica la distribución del número X de piezas defectuosas y su media y desviación típica.

b. Comprueba que se puede aproximar por una normal ($np > 5$ y $n(1-p) > 5$).
c. Calcula la probabilidad de que el cliente devuelva el pedido, usando la corrección de continuidad.
d. Calcula la probabilidad de que haya entre 15 y 25 defectuosas, ambas incluidas.
e. Explica por qué se usa la corrección de continuidad.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: la sobreventa de billetes

Una aerolínea vende 210 billetes para un avión de 200 plazas entre Madrid y Tenerife porque sabe que el 8 % de los pasajeros no se presenta. Se supone que cada pasajero decide de forma independiente. Si se presentan más de 200, la compañía debe indemnizar a los que se quedan en tierra.

a. ¿Qué distribución sigue el número X de pasajeros que se presentan? Calcula su media y su desviación típica.
b. Justifica la aproximación normal.
c. Calcula la probabilidad de que se presenten más de 200 pasajeros.
d. ¿Qué probabilidad hay de que queden más de 15 asientos vacíos?
e. Valora si la estrategia de la compañía es arriesgada.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: contestar un test al azar

Un examen de tipo test tiene 50 preguntas con 4 opciones cada una, de las que solo una es correcta. Un alumno que no ha estudiado contesta todas al azar. Para aprobar hacen falta al menos 20 respuestas correctas (no se restan las incorrectas).

a. Indica la distribución del número de aciertos y sus parámetros.
b. Calcula con la aproximación normal la probabilidad de aprobar.
c. ¿Cuántos aciertos se esperan? ¿Entre qué valores estarán aproximadamente el 95 % de los alumnos que contestan al azar?
d. El profesor quiere que la probabilidad de aprobar al azar sea menor del 0,1 %. ¿Es suficiente exigir 20 aciertos?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: la precisión de la máquina

Una máquina de un taller de Albacete corta varillas de acero cuya longitud sigue una $N(50, \sigma)$ en cm. El cliente solo acepta varillas entre 49,5 y 50,5 cm. Actualmente $\sigma = 0{,}3$ cm.

a. ¿Qué porcentaje de varillas rechaza el cliente con la máquina actual?
b. ¿Qué desviación típica debería tener la máquina para que se acepte el 95 % de las varillas?

c. Con $\sigma = 0{,}3$, si la máquina se desajusta y la media pasa a 50,2 cm, ¿qué porcentaje se rechaza?
d. Explica por qué conviene vigilar tanto la media como la desviación típica.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: ¿quién tiene mejor nota?

Lucía y Pablo estudian en institutos distintos de Granada. En el examen de Lucía la nota media fue 6 con desviación típica 1,2, y Lucía sacó un 8. En el de Pablo la media fue 5 con desviación típica 2, y Pablo sacó un 8,5. Las notas se distribuyen normalmente.

a. Calcula la nota tipificada de cada uno.
b. ¿Quién tiene un resultado relativamente mejor?
c. ¿Qué porcentaje de su clase supera a cada uno?
d. ¿Qué nota debería haber sacado Pablo para estar en la misma posición relativa que Lucía?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: hallar la media y la desviación típica

Para ir más allá. El tiempo que tardan los visitantes en recorrer un museo sigue una distribución normal. Se sabe que el 15,87 % tarda menos de 60 minutos y que el 2,28 % tarda más de 90 minutos.

a. Escribe las dos condiciones con la variable tipificada.
b. Busca en la tabla los valores de z.
c. Plantea y resuelve el sistema para μ y σ.
d. ¿Qué porcentaje tarda entre 60 y 80 minutos?